Artur Bălăucă

Adrian Boţan **Ioan Ciobanaşu**

Gabriel Mîrşanu **Gheorghe Oniciuc** **Dumitru Poroşniuc**

15
EDIŢII ALE CONCURSULUI INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „DIMITRIE POMPEIU“ BOTOŞANI
(2001 – 2015)

CLASELE III - XI

Editura TAIDA
– IAŞI –

Introducere

Nordul Moldovei, inclusiv Botoșaniul, a dat României o pleiadă însemnată de intelectuali de mare valoare, inclusiv matematicieni, stindarde ale culturii românești. Dintre matematicieni, probabil că cel mai important este Dimitrie Pompeiu.

Era, astfel, natural, ca tinerii elevi talentați și iubitori de matematică, să se bucure de un concurs, al cărui nume să fie legat de extraordinarul Pompeiu, cel mai citat matematician român până azi, îndeobște prin celebra conjectură zămislită în 1929.

Prin dragostea pentru matematica școlară, a regretatului profesor de geometrie de la Universitatea din Iași, Dan Brânzei, intelectual de excepție, cât și prin iubirea de matematică și probleme pentru cei mici, a unui celebru dascăl botoșănean, Artur Bălăucă, acum cincisprezece ani s-a născut acest concurs.

Sunt în România competiții de matematică cu zecile, unele remarcabile, altele mai îndoielnice. Concursul Dimitrie Pompeiu are, însă, o patină aparte: problemele fac în primul rând apel la intuiție și imaginație, în mult mai mare măsură decât la tehnici de rezolvări de probleme. În plus, faptul că în ultimii ani participă și copii din clasele primare, iar problemele pentru aceștia sunt extrem de aplicate spre gândirea liberă și corectă, aduce o noutate în peisajul educației prin competiții școlare.

Am venit la Botoșani, la concurs, cu mare plăcere în ultimii ani. Îl consider un festival al bucuriei matematice și al reîntâlnirii cu dragii colegi moldoveni, mulți dintre ei, printre autorii acestei cărți.

Am remarcat de fiecare dată aplecarea autorităților botoșănene spre a asigura desfășurarea concursului în condițiile cele mai bune, pentru copii: de la Consiliul Județean, Primărie și până la Inspectoratul Școlar Județean.

Această carte este o colecție de bijuterii matematice, în mare parte cizelate de către dascălii din zonă. Minunat!

Radu Gologan

ARGUMENT

„Nu adevăru-i rostul
Ci drumul tău spre el.“
(Dan Brânzei – *Caut*)

Am apucat o vreme când se înscăunase dinspre Răsărit o vorbă de fală: ***Noi muncim, nu gândim!*** Mă tem că o să apuc alte vorbe falnice dinspre Apus: ***Noi câştigăm, nu gândim!*** Să fie pe la casele lor gândurile astea! Unii aveau puterea, alţii au banul (ceea ce e cam acelaşi lucru), noi ne mai apărăm (câteodată) *sărăcia şi nevoile şi neamul.*

Avem copii sănătoşi, cuminţi şi deştepţi. Mai bântuie pe la unii gândul că or trece ca gâsca prin apă şi or ajunge la câinii cu colaci în coadă. Chiar dacă or fi acuma mulţi de aceştia, nu ei sunt importanţi şi nu de dânşii atârnă devenirea noastră.

Cei buni, cu aplecare spre dreapta ştiinţă a matematicii, s-au deprins să se tot întâlnească în concursuri: ***Noi nu tocim, ci gândim!***

Bănuind că dreptatea este de partea lor, colegii au strâns sclipiri de prin concursuri Botoşănene ce s-au învrednicit de numele matematicianului **Dimitrie Pompeiu.** Poate nu vor fi prea multe pagini să cadă greu peste picioare, dar este aici pildă şi judecată care să priiască minţilor iscoditoare.

Mă bucur că am avut bună ocazie să fiu şi eu pe la înfruntările acestea. Răsfoind acuma cartea îmi revin în faţa ochilor eroii lor: copii îndârjiţi să spargă enigme, să le aşeze în cugetare limpede, să binemerite diplome şi premii, să închege drepte prietenii. Poate, exemplul lor va îndreptăţi strădanii.

Cu respect faţă de ***cei ce gândesc,***

Prof. univ. dr. Dan Brânzei

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN
„DIMITRIE POMPEIU”

EDIŢIA I – 2 iunie 2001

CLASA a V-a

1. La o împărţire de numere naturale, suma dintre împărţitor, cât şi rest este egală cu deîmpărţitul. Să se arate că împărţitorul este egal cu câtul.

2. Să se determine un număr impar de numere naturale consecutive a căror sumă este 2001.

3. Fie numerele naturale a şi b astfel încât $a < b$. Să se arate că $a^{n+1} + b^n \leq a^n + b^{n+1}$, oricare ar fi $n \in N^*$.

CLASA a VI-a

4. Fie triunghiul ΔABC cu măsurile unghiurilor direct proporţionale cu numerele 2, 4 şi 6 $\left(m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle B) > m(\sphericalangle C)\right)$. Dacă M este simetricul vârfului A faţă de dreapta BC, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BMC$ intersectează dreapta AB în N, să se demonstreze că $(AM) \equiv (AN)$ şi să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului MNC.

5. a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$3xy + 2x = 5y + 1.$$

b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} \geq \frac{5}{6}$.

6. Arătaţi că nu există trei numere naturale prime astfel încât adunându-le două câte două să se obţină sume ce au 2, 3 şi, respectiv, 5 divizori naturali.

CLASA a VII – a

7. Să se determine $x \in Z,\ y,z \in Z^*$ ce verifică relaţia: $x+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2001$.

8. Să se arate că: **a)** $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} \geq \frac{5}{6}$;

b) $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\frac{3}{\sqrt{6+\sqrt{6}}}+\ldots+\frac{n+1}{\sqrt{n(n+1)+\sqrt{n(n+1)}}} \geq n, n \in N^*$.

(*Niculai Solomon*)

9. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $M \in (AB), P \in (CD)$ astfel încât $\frac{AM}{AB}=\frac{CP}{CD}=k$. Construim $MN \parallel AC$, $N \in BC$ şi $MQ \parallel BD$, $Q \in AD$.

a) Demonstraţi că *MNPQ* este paralelogram.

b) Aflaţi valoarea raportului ariilor patrulaterelor *MNPQ* şi *ABCD* în funcţie de *k*.

c) Aflaţi *k* astfel încât raportul ariilor patrulaterelor să aibă valoarea maximă.

CLASA a VIII - a

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$:

a) $x+[x]=2x \cdot [x]+\frac{1}{2}$;

b) $x+[x]>x[x]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

11. Fie funcţia $f:[a,b] \to \mathbb{R}; a<b$;

$$f(x)=m \cdot x+n;\ m,n \in \mathbb{R}, m \neq 0.$$

a) Arătaţi că valoarea maximă a funcţiei *f* este: *max* (*f*(*a*), *f*(*b*)).

b) Dacă *x, y, z, a, b, c* $\in [0,1]$, demonstraţi inegalitatea:

$$ax+by+cz-abxy-acxz-bcyz-1 \leq 0.$$

EDIȚIA a XV-a, 8-10 mai 2015
Clasa a III-a*)

323. Mara a venit de la școală și s-a uitat la ceas. Arăta ora 10:00. Apoi și-a dat seama că ceasul era oprit (nu avea bateria funcțională). I-a schimbat bateria cu una nouă și a plecat la o prietenă. Când a revenit acasă, la radio s-a anunțat ora 16:00, în timp ce ceasul ei arăta ora 13:30. La ce oră (corectă) a venit Mara de la școală? Justificați!

324. a) Tatăl lui Gigel construiește un gard la care se folosesc 10 stâlpi fixați din 2 în 2 metri și câte 11 scânduri pentru fiecare metru de gard. Câte scânduri a folosit pentru tot gardul?
b) Un seif se deschide folosind un cod din trei cifre diferite, format de cifrele 1, 2 și 3. Dacă nu știu codul, câte combinații trebuie să încerc pentru a deschide seiful?

325. a) Ionel are 120 de lei și Ana are 90 de lei. Ionel cheltuiește 10 lei pe zi, iar Ana cheltuiește 7 lei pe zi. După câte zile cei doi copii vor avea sume egale de bani?
b) Cu un sfert din banii pe care îi are, Maria a cumpărat o păpușă, iar de restul a cumpărat 3 cărți a câte 15 lei fiecare. Câți lei a avut Maria?

326. PROBLEMĂ SUPLIMENTARĂ

Cățelușa Lassie are 7 ani și a observat că în fiecare iarnă se îngrașă cu 3 kg iar în fiecare vară slăbește cu 2 kg. Primăvara și toamna nu-și schimbă greutatea. În primăvara anului 2015 ea cântărește 32 de kg. Câte kilograme cântărea Lassie în toamna anului 2000?

***) Subiectele au fost selectate de prof. Mariana Ciobanașu**

Clasa a IV-a

327. Se iau, la întâmplare, zece numere naturale. Suma tuturor resturilor împărțirii celor zece numere la 10 este 44. Arătați că există două numere a căror diferență se termină cu 0.

(***)

328. Câte numere naturale de trei cifre nenule sunt strict mai mari decât răsturnatele lor?

(Cătălin Budeanu)

SOLUŢII, INDICAŢII, RĂSPUNSURI. COMENTARII

1. Fie I, C, R, D împărţitorul, câtul, restul şi, respectiv, deîmpărţitul. Din relaţiile $D = I \cdot C + R$, $R < I$ şi $I + C + R = D$ rezultă $I + C = I \cdot C$, de unde $I(C-1) = C$, adică $C-1/C$ sau $C-1/(C-1)+1$, $C-1/1 \Rightarrow C = 2$ şi $I = 2$.

2. Fie $n+1, n+2, \ldots, n+(2k+1)$ numerele consecutive. Avem: $(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+2k+1) = 2001 \Rightarrow \underbrace{n+n+\ldots+n}_{2k+1 \text{ termeni}} + 1 +$

$+ 2 + \ldots + (2k+1) = (2k+1)n + \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)\cdot(n+k+1) =$

$= 2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29 \Rightarrow 2k+1 \in \{1, 3, 23, 29, 69, 87, 667, 2001\}$. Se obţine soluţie pentru $2k+1 \in \{3, 23, 29\}$. Numerele sunt: 666, 667, 668 sau 76, 77,…, 98 sau 55, 56, …,83.

3. $a^{n+1} + b^n \le a^n + b^{n+1} \Leftrightarrow a^n(a-1) \le b^n(b-1)$; $a = 0$ şi $b = 1 \Rightarrow a^{n+1} + b^n = a^n + b^{n+1}$. Dacă $a = 0$ şi $b > 1 \Rightarrow b^n(b-1) > 0$ şi $a^n(a-1) = 0$ etc. Dacă $a = 1$ atunci $b \ge 2$ şi $b^n(b-1) > 0$, iar $a^n(a-1) = 0$ etc. Dacă $a > 1$, cum $b > a$ rezultă $b^n > a^n$ şi $b - 1 > a - 1$ etc.

4. $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle B) = 60^0$, $m(\sphericalangle C) = 30^0$. În triunghiul ΔAMN, $m(\sphericalangle AMN) = m(\sphericalangle ANM) = 15°$. Triunghiul ANC este dreptunghic isoscel, $m(\sphericalangle NMC) = 45°$, $m(\sphericalangle MNC) = 30°$, $m(\sphericalangle MCN) = 150°$.

5. a) $3xy + 2x = 5y + 1 \Leftrightarrow x(3y+2) = 5y + 1 \Leftrightarrow 3x(3y+2) = 5 \cdot 3y + 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x(3y+2) = 5(3y+2) - 7$. Deci $3y + 2 / 7$, de unde $3y + 2 \in \{-7; -1; 1; 7\}$, etc.

b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n} \ge \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right) +$

$+\left(\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n}\right) \ge \dfrac{5}{6}.$

$\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \ge \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$ şi $\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n} \ge \dfrac{n}{3n} = \dfrac{1}{3}$ etc.

6. Presupunem că există numerele a, b, c ($a \le b$) cu proprietatea din enunţ. Dacă $a + b$ are 2 divizori, atunci $a + b$ este prim şi $a = 2$, iar b este impar.

I. Dacă $a + c$ are 3 divizori şi $b + c$ are 5 divizori, atunci $a + c = q^2$, q prim şi $b + c = p^4$, p prim, de unde rezultă $c = 2$, contradicţie pentru că $c > 2$.

II. Dacă $a + c$ are 5 divizori şi $b + c$ are 3 divizori, atunci $a + c = m^4$, m prim şi $b + c = n^2$, n prim, de unde $c = 2$, contradicţie pentru că $c > 2$.

7. $x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2001 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2001 - x \in \mathbb{Z}$; $y, z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow |z| \ge 1$ şi $|y| \ge 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|z|} \le 1$ şi $\dfrac{1}{|y|} \le 1 \Rightarrow -2 \le \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \le 2$ şi $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Cuprins