ARTUR BĂLĂUCĂ

CĂTĂLIN BUDEANU TOADER MĂGUREAN

ARITMETICĂ
ALGEBRĂ GEOMETRIE

Clasa a VI-a

- Itemi cu note
- Modele de teste ce conţin itemi cu note şi bareme de notare
- Teste iniţiale
- Variante de teste pentru lucrarea scrisă semestrială

EDITURA TAIDA
– IAŞI –

Ecuaţia succesului în viaţă

Einstein se felicită:
„– Am descoperit formula succesului în viaţă.
Ea se exprimă prin ecuaţia:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{O} + \boldsymbol{S}, \text{ unde:}$$

X reprezintă succesul în viaţă
M – munca
O – odihna
S – stăpâneşte-ţi limba!“

Introducere

În anul şcolar 2008 – 2009 programa şcolară a suferit majore modificări fiind valabilă şi în anul şcolar 2015 – 2016 cu diferenţe nesemnificative. Evident, manualele alternative fiind complet depăşite sunt neutilizabile.

Intenţia declarată a autorilor este de a se alinia programei actuale, iar lucrarea elaborată se constituie într-un auxiliar ales de colegul nostru „rătăcit”, poate, printre atâtea culegeri de probleme, grupate după anul sau locul în care au fost propuse.

Lucrarea prezintă consideraţii teoretice la noţiunile de bază ale programei plecând de la situaţii cotidiene întâlnite de elev, prin modele de exerciţii şi probleme rezolvate, ce pot fi utilizate la sistematizarea şi aprofundarea cunoştinţelor, cât şi în activităţi opţionale.

Prezenta lucrare grupează elementele de conţinut ale programei şcolare actuale în unităţi de învăţare, cu respectarea logicii interne de dezvoltare a conceptelor matematice.

Pentru formarea competenţelor europene specifice studiului matematicii în gimnaziu, lucrarea a fost astfel concepută încât să contribuie la formarea obişnuinţei elevilor de a apela la concepte şi metode matematice în abordarea unor situaţii cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice.

Problemele sunt compartimentate pe capitole, unităţi de învăţare şi chiar pe lecţii cu rezolvări bine echilibrate. Pentru fiecare lecţie au fost selectate probleme reprezentative care contribuie la aprofundarea noţiunilor ce le conţin.

Problemele sunt variate şi de conţinut, fiind evitate cele artificial concepute după clişee sterile, cum se găsesc, din abundenţă, prin diverse culegeri.

Lucrarea constituie un suport eficient pentru profesori, elevi şi părinţi, pentru o evaluare şi autoevaluare cât mai obiectivă, de aceea fiecare exerciţiu are specificată nota corespunzătoare.

De asemenea, lucrarea cuprinde 41 modele de teste, din care 10 variante de teză pe semestrul I, cu itemi specifici intervalului de evaluare, astfel: se obţin 40 de puncte din itemi de nota 5; câte 20 de puncte din itemi de nota 7, respectiv 9; 10 puncte din itemi de nota 10 şi 10 puncte se acordă din oficiu.

În afara testelor clasice am introdus şi teste grilă şi cu răspuns deschis. La testele grilă elevul trebuie să aleagă răspunsul corect din variantele de răspunsuri date, ştiind că unul şi numai unul din răspunsuri este corect, iar la testele cu răspuns deschis trebuie completat spaţiul punctat cu răspunsul corect.

După prezentarea enunţurilor problemelor propuse urmează soluţii, indicaţii, răspunsuri şi comentarii.

Problemele asemănătoare cu precedentele au primit indicaţii parţiale sau numai răspunsurile de rigoare, lăsându-le elevilor posibilitatea de a-şi dovedi ingeniozitatea şi creativitatea prin găsirea unor soluţii deosebite.

În general, soluţiile prezentate nu sunt exhaustive, lăsând rezolvitorilor posibilitatea de a contribui efectiv la completări. Totuşi, în prezentarea unor soluţii, am avut în vedere rigurozitatea, insistând asupra cazurilor ce pot să apară în unele probleme în funcţie de parametrii pe care acestea îi conţin, dorind să formăm la elevi deprinderea de a căuta toate soluţiile unei probleme.

Suntem recunoscători şi adresăm mulţumirile noastre atât colegilor, părinţilor, cât şi elevilor care ne-au dat sugestii şi sfaturi competente, care ne-au condus la completarea lucrării.

Artur Bălăucă

Cuprins

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ		Breviar	Enunțuri	Soluții
Capitolul I. MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE				
I.1.	*Operaţii cu numere naturale*	7	8	272
I.2.	*Reguli de calcul cu puteri. Compararea și ordonarea puterilor*	14	15	273
I.3.	*Divizor, multiplu. Criterii de divizibilitate cu 10, 2, 5, 3, 9*	19	20	274
I.4.	*Numere prime şi numere compuse*	23	23	275
I.5.	*Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime*	25	26	275
I.6.	*Proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate în* $\mathbb{N}$	28	29	276
I.7.	*Divizori comuni a două sau a mai multor numere naturale, c.m.m.d.c; numere prime între ele*	30	33	277
I.8.	*Multipli comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.m.c.; relaţia dintre c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c.*	35	36	277
I.9.	*Probleme aplicative care se rezolvă folosind divizibilitatea în* $\mathbb{N}$		38	278
Capitolul II. MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE POZITIVE, $\mathbb{Q}_+$				
II.1.	*Fracţii echivalente; fracţie ireductibilă; noţiunea de număr raţional; forme de scriere a unui număr raţional;* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. *Aducerea fracţiilor la un numitor comun. Compararea şi ordonarea numerelor raţionale*	41	49	279
	OPERAŢII CU NUMERE RAŢIONALE POZITIVE			
II.2.	*Adunarea numerelor raţionale pozitive. Proprietăţi*	56	58	282
II.3.	*Scăderea numerelor raţionale pozitive*	62	63	283
II.4.	*Înmulţirea numerelor raţionale pozitive. Proprietăţi*	67	68	284
II.5.	*Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr raţional pozitiv; reguli de calcul cu puteri*	70	71	285
II.6.	*Împărţirea numerelor raţionale pozitive*	72	73	286
II.7.	*Ordinea efectuării operaţiilor cu numere raţionale pozitive*	76	77	287
II.8.	*Media aritmetică ponderată a unor numere raţionale pozitive*	79	81	288
II.9.	*Ecuaţii în mulţimea numerelor raţionale pozitive. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor*	83	85	288
Capitolul III. RAPOARTE ŞI PROPORŢII				
III.1.	*Rapoarte*	92	93	290
III.2.	*Procente; probleme în care intervin procente*	96	98	291
III.3.	*Proporţii; proprietatea fundamentală a proporţiilor; aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporţie; proporţii derivate*	104	107	292
III.4.	*Mărimi direct proporţionale; regula de trei simplă; şir de rapoarte egale*	110	111	293
III.5.	*Mărimi invers proporţionale. Regula de trei simplă*	114	116	294
III.6.	*Elemente de organizare a datelor; reprezentarea datelor prin grafice*	118	119	294
III.7.	*Experienţă aleatoare. Probă. Eveniment. Probabilităţi*	123	124	295
Capitolul IV. NUMERE ÎNTREGI				
IV.1.	*Mulţimea numerelor întregi* $\mathbb{Z}$*; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axă a numerelor întregi; valoarea absolută (modulul); compararea şi ordonarea numerelor întregi*	129	132	296
	OPERAŢII ÎN MULŢIMEA $\mathbb{Z}$			
IV.2.	*Adunarea numerelor întregi; proprietăţi*	135	138	297
IV.3.	*Scăderea numerelor întregi*	139	140	297
IV.4.	*Înmulţirea numerelor întregi; proprietăţi; mulţimea multiplilor unui număr întreg*	142	143	297
IV.5.	*Împărţirea numerelor întregi când deîmpărţitul este multiplu al împărţitorului; mulţimea divizorilor unui număr întreg*	145	146	298
IV.6.	*Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural; reguli de calcul cu puteri*	148	149	298
IV.7.	*Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor*	151	151	299

IV.8.	*Ecuaţii în $\mathbb{Z}$; probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor*	152	153	299
IV.9.	*Inecuaţii în mulţimea numerelor întregi*	155	156	300
GEOMETRIE				
Capitolul I				
I.1.	*Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment (descriere, reprezentare, notaţii). Poziţiile relative ale unui punct faţă de o dreaptă; puncte coliniare; „prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una”*	159	161	301
I.2.	*Poziţiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele*	164	165	301
I.3.	*Lungimea unui segment; distanţa dintre două puncte. Segmente congruente, construcţia unui segment congruent cu un segment dat, mijlocul unui segment, simetricul unui punct faţă de un punct*	166	170	302
Capitolul II. UNGHIURI				
II.1.	*Definiţie, notaţii, elemente; interiorul unui unghi; exteriorul unui unghi; unghi nul; unghi cu laturile în prelungire*	175	176	304
II.2.	*Măsurarea unghiurilor cu raportorul; unghiuri congruente; unghi drept, unghi ascuţit, unghi obtuz*	178	179	304
II.3.	*Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade şi minute sexagesimale. Unghiuri suplementare, unghiuri complementare*	183	184	305
II.4.	*Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi*	186	187	305
II.5.	*Unghiuri opuse la vârf, congruenţa lor; unghiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor*	190	192	306
Capitolul III. CONGRUENŢA TRIUNGHIURILOR				
III.1.	*Triunghi. Clasificare. Perimetrul triunghiului. Unghi exterior unui triunghi*	197	198	307
III.2.	*Construcţia triunghiurilor*	199	200	
III.3.	*Congruenţa triunghiurilor; metoda triunghiurilor congruente*	201	203	307
Capitolul IV. PERPENDICULARITATE				
IV.1.	*Drepte perpendiculare. Distanţa de la un punct la o dreaptă*	209	210	311
IV.2.	*Construcţia şi congruenţa triunghiurilor dreptunghice*	211	212	311
IV.3.	*Mediatoarea unui segment. Concurenţa mediatoarelor laturilor unui triunghi*	214	215	312
IV.4.	*Simetria faţă de o dreaptă*	217	218	313
IV.5.	*Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Concurenţa bisectoarelor unghiurilor unui triunghi*	220	221	313
Capitolul V. PARALELISM				
	Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)	223	225	314
Capitolul VI. PROPRIETĂŢI ALE TRIUNGHIURILOR				
VI.1.	*Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior*	229	230	315
VI.2.	*Înălţimea unui triunghi. Concurenţa înălţimilor unui triunghi*	232	233	316
VI.3.	*Aria unui triunghi (intuitiv pe reţele de pătrate)*	235	236	316
VI.4.	*Mediana în triunghi. Concurenţa medianelor unui triunghi*	238	240	316
VI.5.	*Proprietăţi ale triunghiului isoscel (unghiuri, linii importante, simetrie)*	241	243	317
VI.6.	*Proprietăţi ale triunghiul echilateral (unghiuri, linii importante, simetrie)*	247	248	319
VI.7.	*Proprietăţi ale triunghiului dreptunghic*	251	252	320
Capitolul VII. VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU LUCRAREA SCRISĂ SEMESTRIALĂ				
	Semestrul I. Testele 24 - 28		255	322
	Semestrul al II-lea. Testele 29 - 33		259	323
Capitolul VIII. RECAPITULARE FINALĂ				
	Testele 34 - 41		264	324
Rezultate. Indicaţii. Soluţii. Comentarii			272	
Bibliografie			326	

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ
CAPITOLUL I

MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE

I. 1. *Operaţii cu numere naturale*

Să recapitulăm:

Adunarea numerelor naturale

• Aflaţi suma dintre cel mai mare şi cel mai mic număr natural de 5 cifre, ştiind că cifrele fiecărui număr sunt distincte.

Răspuns: 108999

Rezolvare

$$\begin{array}{r} 98765+ \\ 10234 \\ \hline 108999 \end{array}$$

Scăderea numerelor naturale

• O societate comercială a depus la bancă într-o zi suma de 57893 lei, iar a doua zi o sumă cu 13959 lei mai mică decât în prima zi.

Aflaţi:

a) Cât a depus societatea comercială în a doua zi la bancă?

b) Ce sumă a depus în ambele zile?

Răspuns: În a doua zi a depus 43934 lei, iar în ambele zile a depus 101827 lei.

Rezolvare

a) $$\begin{array}{r} 57893- \\ 13959 \\ \hline 43934 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} 57893+ \\ 43934 \\ \hline 101827 \end{array}$$

Reţineţi!

➲ $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a şi b (**comutativitatea**);

➲ $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a şi b (**asociativitatea**);

➲ $a + 0 = 0 + a = a$ (0 este **element neutru** la adunarea numerelor naturale).

Înmulţirea numerelor naturale

• Printr-un robinet curg într-o oră 897 litri de apă.

Ce cantitate de apă va curge prin acelaşi robinet în 17 ore?

Răspuns: 15249 l de apă.

Rezolvare

$$\begin{array}{r} 897\cdot \\ 17 \\ \hline 2679 \\ 897 \\ \hline 15249 \end{array}$$

Reţineţi!

➲ $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a şi b (**comutativitatea**);

➲ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele naturale a şi b (**asociativitatea**);

➲ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 este **element neutru** la adunarea numerelor naturale);

➲ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ şi $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, $(b \geq c)$ (**distributivitatea** înmulţirii faţă de adunare şi scădere);

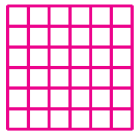
➲ $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (0 este **element absorbant**).

Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural

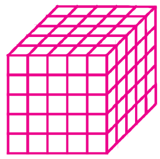
Putem reprezenta 6^2 printr-un pătrat cu 6 rânduri, fiecare având câte 6 pătrăţele?
Dar 5^3 printr-un cub cu 5 straturi, fiecare strat conţinând 5 rânduri de câte 5 cubuleţe?

Rezolvare:

6^2



5^3



Avem:
$36 = 6 \cdot 6 = 6^2$
$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$

➲ Spunem că 36 este pătratul lui 6 sau că 36 este 6 la pătrat şi că 125 este cubul lui 5 sau că 125 este 5 la cub.
➲ Spunem că 36 este pătrat perfect, iar 125 este cub perfect.

În general: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ \text{factori}} = a^n$, unde $a, b \in \mathbb{N}$.

Reţineţi!

Dacă $a, n \in \mathbb{N}$, atunci:
➲ Scrierea $\boldsymbol{a^n}$ se citeşte ***a* la puterea *n*** sau **puterea a *n*-a a numărului *a***;
➲ ***a*** se numeşte **baza puterii**, iar ***n*** **exponentul puterii.**

Cazuri particulare: $a^1 = a$, $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$, 0^0 nu are sens;
$0^n = 0$ $(n \neq 0)$, $1^n = 1$ (oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$);
0^0 – nu este definită (nu are sens).

Împărţirea cu rest a numerelor naturale

Un microbuz are 18 locuri. Câte transporturi trebuie să facă microbuzul pentru a transporta 423 de persoane?

Avem:

$$\begin{array}{r|l} 423 & 18 \\ \cline{2-2} \underline{36\ } & 23 \\ 63 & \\ \underline{54} & \\ 9 & \end{array}$$

Răspuns:
24 de transporturi. Avem: $423 = 18 \cdot 23 + 9$.

În general:

↳ Oricare ar fi numerele naturale a şi b, $b \neq 0$, există numerele naturale c şi r, unic determinate, astfel încât $a = b \cdot c + r$, $r < b$ (**teorema împărţirii cu rest**).
↳ „a“ se numeşte **deîmpărţit**, „b“ se numeşte **împărţitor**, „c“ se numeşte **cât**, iar „r“ este **restul** împărţirii.
↳ $0 : a = 0$, oricare ar fi numărul natural nenul a.
↳ Împărţirea la 0 nu are sens.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Calculaţi:

a) 3452 + 1759; **b)** 3456 + 189; **c)** 4035 + 893; **d)** 359 + 173 + 483; **e)** 893 + 106 + 713;
f) 931 + 92 + 135; **g)** 493 + 23 + 145 + 16; **h)** 473 + 594 + 78345; **i)** 378 – 59; **j)** 17435 – 3946;
k) 732 + 148 – 594; **l)** 38452 – 198 – 334; **m)** 47321 – 1893; **n)** 7312 + 89 –567; **o)** 4325 – 789 – 1034. (*nota* 5)

2. Calculaţi utilizând proprietăţile adunării:

a) 27 + 58 + 42 + 63; **b)** 7835 + 749 + 251; **c)** 139 + 45 + 61 + 55;
d) 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24; **e)** 49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54; **f)** 25 + 50 + 75 + 100 + 75 + 150. (*nota* 7)

II.7. *Ordinea efectuării operaţiilor cu numere raţionale pozitive*

Reţineţi!

➲ Ordinea efectuării operaţiilor cu numere raţionale pozitive şi ordinea parantezelor este aceeaşi ca şi a operaţiilor cu numere naturale. (Vezi pagina 11)

Exemple:

Calculaţi:

a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$;

b) $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}:\frac{3}{14}$;

c) $2\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{4}:\frac{5}{8}-0{,}2\cdot\frac{1}{3}:\frac{5}{6}$;

d) $\left(\frac{5}{7}-\frac{9}{14}\right):\frac{5}{21}$;

e) $\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{13}{4}-\frac{25}{8}:\frac{25}{4}\right)\right]$;

f) $\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right):0{,}5\right]\right\}:3\frac{5}{6}$.

***Rezolvare*:**

a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{6}={}^{2/}\frac{3}{3}-\frac{5}{6}=\frac{6-5}{6}=\frac{1}{6}$.

b) $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}:\frac{3}{14}=\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{7}_{1}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{\cancel{2}\,1}}\cdot\frac{\cancel{14}^{\cancel{7}\,1}}{\cancel{3}_{1}}=1$.

c) ${}^{1}\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_{3}}+\frac{5}{4}:\frac{5}{8}-0{,}2\cdot\frac{1}{3}:\frac{5}{6}=\frac{1}{3}+\frac{{}^{1}\cancel{5}}{{}_{1}\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{5}_{1}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{{}_{1}\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{6}^{2}}{5}=$

$={}^{25/}\frac{1}{3}+{}^{75/}\frac{2}{1}-{}^{3/}\frac{2}{25}=\frac{25}{75}+\frac{150}{75}-\frac{6}{75}=\frac{169}{75}=2\frac{19}{75}$.

d) $\left(\frac{5}{7}-\frac{9}{14}\right):\frac{5}{21}=\left(\frac{10}{14}-\frac{9}{14}\right):\frac{5}{21}=\frac{1}{\cancel{14}_{2}}\cdot\frac{\cancel{21}^{3}}{5}=\frac{3}{10}$.

e) $\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{13}{4}-\frac{\cancel{25}^{1}}{\cancel{8}_{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{25}_{1}}\right)\right]=\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{13}{4}-{}^{2/}\frac{1}{2}\right)\right]=$

$=\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{13}{4}-\frac{2}{4}\right)\right]=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{2}{4}+\frac{11}{4}\right)=$

$=\frac{5}{6}\cdot\frac{13}{4}=\frac{65}{24}=2\frac{17}{24}$.

f) $\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right):0{,}5\right]\right\}:3\frac{5}{6}=$

$=\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\right):\frac{1}{2}\right]\right\}:\frac{23}{6}=$

$=\left[1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_{3}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{1}\right)\right]\cdot\frac{6}{23}=\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{6}{23}=$

$=\left({}^{27/}1+\frac{1}{27}\right)\cdot\frac{6}{23}=\left(\frac{27}{27}+\frac{1}{27}\right)\cdot\frac{6}{23}=\frac{28}{\cancel{27}_{9}}\cdot\frac{\cancel{6}^{2}}{23}=\frac{56}{207}$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Calculaţi: **a)** $\left(3\frac{2}{7}+4\frac{1}{5}\right):\left(\frac{21}{5}+\frac{23}{7}\right)$; **b)** $5\frac{1}{3}:6\frac{2}{5}+\left(12:3\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}$;

c) $\left[\frac{16}{5}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{7}{20}$; **d)** $\frac{111}{900}:\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{90}+\frac{1}{900}\right)$; **e)** $\left[\left(2\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}\right):2\frac{1}{5}\right]+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right):\frac{10}{8}$. (*nota* 7)

2. Calculaţi: **a)** $6\cdot\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{24}\right)\right]:\frac{29}{6}$; **b)** $\left[12+11:\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)\right]\cdot\frac{7}{27}$;

c) $10\frac{1}{24}+\left(7\frac{1}{2}\cdot2\frac{2}{3}-12\frac{1}{4}:\frac{7}{9}\right):6$; **d)** $\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{8}\right):\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{20}\right):\left(1+\frac{9}{20}\right)\right]:\frac{7}{50}$;

e) $1:\left\{\frac{1}{3}+\frac{12}{13}\cdot\left[\frac{1}{3}+1:\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\right)\right]\right\}\cdot40$; **f)** $\frac{1}{4}:\left\{\frac{1}{4}+4\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}:\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$;

g) $\left(\frac{1}{1997}-\frac{1}{1997\cdot1998}\right):\left(\frac{1}{1998}-\frac{1}{1997\cdot1998}\right)$. (*nota* 9)

3. Calculaţi: **a)** $\frac{5}{6}+2\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}$; **b)** $2\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{14}-1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$; **c)** $10\frac{1}{2}-\left(2\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{32}-\frac{5}{8}\cdot\frac{14}{25}\right)$;

d) $120\frac{2}{3}-\left[\left(2\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\cdot2\frac{1}{4}\right):\frac{1}{5}+3\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{4}$; **e)** $\left\{\left[3\frac{3}{4}:\left(1\frac{3}{4}:\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\cdot1\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{5}{7}\right]:5+\frac{20}{21}\right\}\cdot2\frac{1}{3}$;

f) $\dfrac{\left(4\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}\right):7\frac{1}{10}+4\frac{1}{2}}{\left(2\frac{1}{4}+2\frac{1}{20}-2\frac{2}{5}\right):1\frac{9}{10}}+\dfrac{10\cdot2\frac{7}{10}}{3+1\frac{2}{3}}$; **g)** $\dfrac{2\frac{3}{2}-1\frac{3}{10}}{2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}+\dfrac{2}{3\frac{3}{7}+\frac{1}{7}}$.

a) - b) (*nota* 7); **c) - g)** (*nota* 9)

4. Efectuaţi: **a)** $5\cdot\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{36}\right):\frac{55}{72}\right]$; **b)** $\frac{85}{800}:\left[\frac{1}{19}\cdot\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{50}\right)+\frac{1}{360}:\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{45}\right)\right]$;

c) $\left[\frac{2}{3}+\frac{2}{3}:\left(\frac{5}{12}-\frac{2}{18}\right)\cdot1\frac{5}{6}\right]^2:\left(2\frac{1}{3}\right)^2$; **d)** $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}:\left[\left(1+1\frac{1}{2}\right)\cdot8-\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}\right]$;

e) $3+3\frac{1}{3}\cdot\left[\left(\frac{5}{2}-3\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{13}\right)\cdot1\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]$; **f)** $\frac{3}{5}\cdot\left\{\left(\frac{7}{1500}+\frac{1}{200}\right)\cdot6\frac{14}{31}+1\frac{4}{7}:\left[\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}-\frac{1}{24}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\right]\right\}$;

g) $\left[\left(4\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}\right)\cdot8-\left(1\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}\right)\cdot16\right]:28$. (*nota* 9)

5. Calculaţi:

a) $0,66+3\frac{1}{7}:\frac{2}{7}$; **b)** $\frac{1}{3}:\left(3+6:\frac{1}{2}\right)$; **c)** $0,6\cdot\left[\frac{1}{3}+\left(1\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}-1\frac{4}{9}\right)\right]\cdot\frac{6}{5}$; **d)** $\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{14}\right)\cdot3\frac{1}{2}$;

e) $0,31:\left[0,25+2\cdot\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{6}\right)\right]$; **f)** $1,4+0,14\cdot\left[\left(2,25+\frac{1}{3}\cdot0,5\right):4\frac{5}{6}+1,75\right]$;

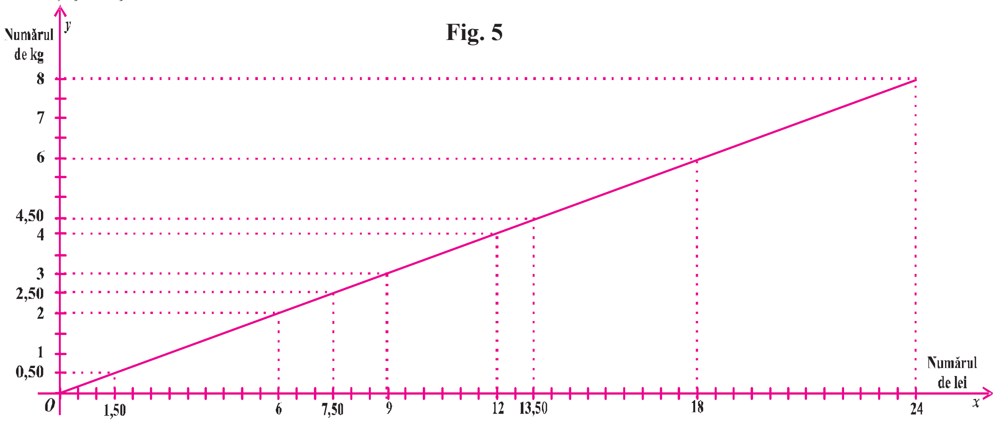
III.4. *Mărimi direct proporţionale; regula de trei simplă; şir de rapoarte egale*

Să observăm:
Un comerciant vinde căpşuni la 8 persoane cu preţul de 3 lei / kg şi completează următorul tabel:

Cantitatea de căpşuni în kg	2	6	4	8	0,5	3	2,50	4,50
Costul în lei	6	18	12	24	1,5	9	7,50	13,50

Acum, figurăm pe un grafic (**fig. 5**) datele din tabel (pe o axă numărul de kg, iar pe cealaltă numărul de lei) şi obţinem:

Fig. 5



➲ Să comparăm perechea de numere 2 şi 8 de pe axa *Oy* cu perechea 6 şi 24 de pe axa *Ox*.
➲ Observăm că dacă cantitatea de căpşuni a crescut de 4 ori, atunci costul total creşte tot de 4 ori.
➲ Comparaţi şi alte perechi de numere corespunzătoare: de exemplu perechea 0,50 şi 6 de pe axa *Oy* cu perechea corespunzătoare 1,50 şi 18 de pe axa *Ox*. Ce observaţi?
➲ Numărului 7 de pe axa *Oy* ce număr îi corespunde pe axa *Ox*?
➲ ***În concluzie:*** Observăm că dacă cantitatea de căpşuni creşte (descreşte) de un număr de ori, atunci şi costul total creşte (descreşte) de acelaşi număr de ori.

➲ ***În general:*** Spunem că două mărimi variabile care depind una de cealaltă astfel încât dacă măsura uneia creşte (descreşte) de un număr de ori, atunci şi măsura celeilalte creşte (descreşte) de acelaşi număr de ori, se numesc **mărimi direct proporţionale.**
Spunem că numerele nenule a_1 şi a_2 sunt **direct proporţionale**, respectiv, cu numerele nenule b_1 şi b_2, dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Să comparăm rapoartele dintre cantităţile de căpşuni vândute şi costurile corespunzătoare:

Avem: $\frac{2}{6}^{(2} = \frac{1}{3}$; $\frac{6}{18}^{(6} = \frac{1}{3}$; $\frac{4}{12}^{(4} = \frac{1}{3}$; $\frac{8}{24}^{(8} = \frac{1}{3}$; $^{10/}\frac{0,5}{1,5} = \frac{5}{15}^{(5} = \frac{1}{3}$; $\frac{3}{9}^{(3} = \frac{1}{3}$; $^{10/}\frac{2,5}{7,5} = \frac{25}{75}^{(25} = \frac{1}{3}$; $\frac{15}{45}^{(3} = \frac{1}{3}$

➲ Observăm că toate rapoartele sunt egale (au aceeaşi valoare) şi avem şirul:
$\frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{3}{9} = \frac{2,50}{7,50} = \frac{15}{45}$.

➲ ***În general:*** Dacă rapoartele $\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \frac{a_3}{b_3}; ...; \frac{a_n}{b_n}$ au aceeaşi valoare, spunem că ele formează un **şir de rapoarte egale.**
➲ Spunem că numerele nenule $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt **direct proporţionale** respectiv, cu numerele nenule $b_1, b_2, ..., b_n$ dacă putem scrie şirul de rapoarte egale: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Problemă rezolvată:

1800 tone de marfă a fost repartizată în trei localităţi. Ştiind că localităţile au câte 5 magazine, 6 magazine şi, respectiv, 7 magazine şi fiecărui magazin i s-a repartizat aceeaşi cantitate de marfă, aflaţi câte tone de marfă a fost repartizată fiecărei localităţi.

Rezolvare:

Fie *a, b, c* cantităţile de marfă repartizate fiecărei localităţi. Numerele *a, b, c* sunt direct proporţionale cu numerele 5, 6 şi, respectiv, 7. Avem şirul de rapoarte egale: $\frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{c}{7}=k$, unde $a = 5k$, $b = 6k$ şi $c = 7k$.

Dar $a + b + c = 1800$, de unde $18k = 1800$.

Deci $k = 100$ şi $a = 500$; $b = 600$; $c = 700$.

Atenţie!

➲ Spunem că am împărţit numărul 1800 în **părţi direct proporţionale** cu numerele 5, 6 şi 7.

Să rezolvăm:

Din 16 kg de portocale se obţin 4 ℓ de suc. Din câte kilograme de portocale se obţine 23 ℓ de suc?

Metoda reducerii la unitate

4 ℓ suc .... 16 kg portocale

1 ℓ suc .... $\frac{16}{4}=4\text{kg}$ portocale

23 ℓ suc .... $4 \cdot 23 = 92$ kg portocale

Răspuns:

23 ℓ de suc se obţin din 92 kg de portocale.

Regula de trei simplă. Metoda proporţiei

4 ℓ .... 16 kg

23 ℓ .... x kg

Avem proporţia: $\frac{4}{23}=\frac{16}{x}$,

de unde $x=\frac{23\cdot 16}{4}=92$.

➲ Mărimile „litri de suc“ şi „cantitatea de portocale“ sunt mărimi direct proporţionale.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Stabiliţi care dintre următoarele perechi de mărimi sunt direct proporţionale: **a)** distanţa şi timpul când viteza rămâne aceeaşi; **b)** timpul şi viteza când distanţa rămâne aceeaşi; **c)** viteza şi distanţa când timpul rămâne acelaşi; **d)** timpul de lucru şi numărul muncitorilor care trebuie să efectueze o lucrare (norma de lucru fiind aceeaşi); **e)** cantitatea de marfă vândută şi costul total când preţul unitar rămâne acelaşi; **f)** numărul de oi şi hrana consumată într-un timp dat când raţia este aceeaşi; **g)** cantitatea de lichid ce curge într-un timp dat şi numărul de robinete dacă debitul este acelaşi (**debit - cantitatea de lichid ce curge printr-un robinet într-o unitate de timp**); **h)** cantitatea de grâu şi cantitatea de făină obţinută; **i)** lungimea şi lăţimea unui dreptunghi când aria rămâne aceeaşi; **j)** cantitatea de benzină consumată de un automobil şi distanţa parcursă. (*nota* 7)

2. Dacă 40 de stilouri costă 80 lei, cât ar costa 11 stilouri de acelaşi fel? (*nota* 5)

3. 6 kilograme de făină se cumpără cu 2 lei şi 49 bani. Cu câţi lei se vor cumpăra 12 kg de făină? (*nota* 5)

4. Dacă 7 *l* de ulei ar costa 10, 5 lei, cât ar costa 75 *l* de ulei? (*nota* 5)

5. Din 200 kg de grâu se obţin 160 kg făină. Din câte kilograme grâu se obţin 420 kg făină? Câte kg de făină se obţin din 3 tone de grâu? (*nota* 7)

6. 6 kilograme de mere costă 18 lei. Cât costă 7 kg de mere? Dar 11 kg de mere? (*nota* 5)

7. Un biciclist a parcurs 10,5 km în 20 de minute. Ce distanţă va parcurge biciclistul în două ore, dacă se va deplasa cu aceeaşi viteză? (*nota* 5)

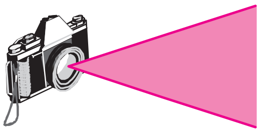
Capitolul II

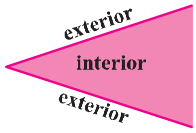
UNGHIURI

II.1. *Definiţie, notaţii, elemente; interiorul unui unghi; exteriorul unui unghi; unghi nul; unghi cu laturile în prelungire*

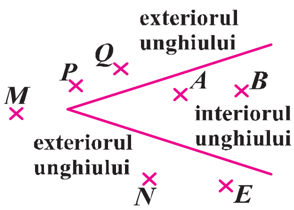
Ce se înţelege prin unghi?

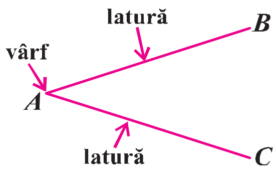
Să observăm:

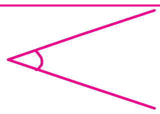
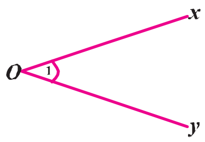




▪ Numim **unghi** figura geometrică formată din două semidrepte închise care au originea comună.





Reprezentăm:	*Scriem:*		*Citim:*
		• $\sphericalangle xOy$ sau $\widehat{xOy}$; • $\hat{1}$ sau $\sphericalangle 1$; • $\sphericalangle O$ sau $\hat{O}$.	• Unghiul *xOy*; • Unghiul 1; • Unghiul *O*.

Observaţii:

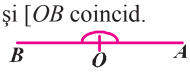
▪ Dacă unghiul îl notăm cu trei litere, atunci litera care marchează vârful lui este scrisă totdeauna în mijloc.

Ce este unghiul nul şi unghiul alungit?

Să observăm:

▪ Laturile [*OA* şi [*OB* coincid.

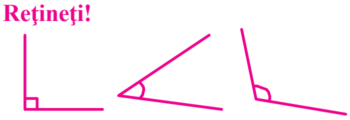
▪ Spunem că unghiul $\sphericalangle AOB$ este **unghi nul.**



▪ Laturile unghiului $\sphericalangle AOB$, semidreptele [*OA* şi [*OB* sunt semidrepte opuse.

▪ Spunem că unghiul $\sphericalangle AOB$ este unghi cu laturile în **prelungire** sau unghi **alungit**.

Reţineţi!



➲ Unghiul care nu este nici alungit, nici nul se numeşte **unghi propriu.**

Capitolul IV

PERPENDICULARITATE

IV.1. *Drepte perpendiculare. Distanţa de la un punct la o dreaptă*

Să recapitulăm:

- Prin plierea unei foi de hârtie de două ori, astfel încât părţile suprapuse să coincidă de fiecare dată se obţin patru unghiuri drepte. Cele două drepte astfel obţinute se vor numi **drepte perpendiculare** (**fig. 103**)
- Dacă dreptele a şi b sunt perpendiculare, atunci notăm $a \perp b$, în caz contrar vom nota $a \not\perp b$.

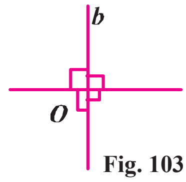


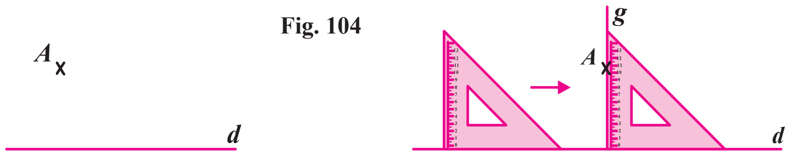
Fig. 103

Cum construim perpendiculara pe o dreaptă dată, dintr-un punct exterior acesteia?

Fie dreapta d şi punctul A, unde $A \notin d$.

Utilizând numai echerul

Fig. 104



Am aşezat echerul cu o catetă pe dreapta d şi apoi l-am deplasat de-a lungul dreptei d până când cealaltă catetă a echerului conţine punctul A, după care trasăm dreapta g (**fig. 104**).

Utilizând compasul şi o riglă negradată

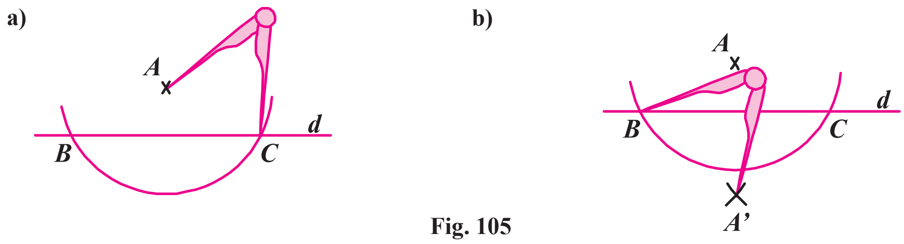


Fig. 105

Pasul 1: Fixăm vârful ascuţit al compasului în punctul A şi cu o deschidere suficient de mare, descriem un arc de cerc care să intersecteze dreapta d în două puncte distincte B şi C (**fig. 105a)**).
Pasul 2: Fixăm vârful ascuţit al compasului în punctul B şi apoi în punctul C cu aceeaşi deschidere şi trasăm câte un arc de cerc situate în semiplanul determinat de dreapta d care nu conţine punctul A (**fig. 105b)**).
Fixăm punctul A' în care se intersectează cele două arce de cerc.
Dreapta AA' este perpendiculară pe dreapta d, adică $AA' \perp d$.

Cum construim perpendiculara pe o dreaptă dată, dintr-un punct care aparţine dreptei? ($A \in d$)

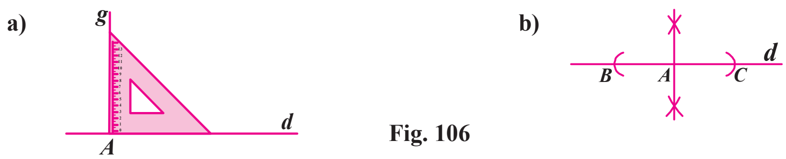


Fig. 106

Dacă $A \in d$ aşezăm echerul cu vârful drept în punctul A şi cu o catetă pe dreapta d (**fig. 106a)**). Dacă utilizăm numai compasul şi o riglă negradată punctele B şi C pe dreapta d le obţinem la pasul 1 construind două arce de cerc, cu aceeaşi deschidere a compasului de o parte şi de alta a punctului A (**fig. 106b)**), apoi repetăm construcţia de la pasul 2 (**fig. 106b)**).

Capitolul VI

PROPRIETĂŢI ALE TRIUNGHIURILOR

VI. 1. *Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior*

Reţineţi!

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

➲ În orice triunghi suma măsurilor unghiurilor este egală cu 180°.

Ipoteza:
Există ΔABC, oarecare.

Concluzia
m(∢BAC) + m(∢ABC) + + m(ACB) = 180°.

Demonstraţie:
Efectuăm o construcţie auxiliară. Fie dreapta DE astfel încât $DE \parallel BC$ şi $A \in DE$ **(fig. 173)**.
m(∢CAD) = m(∢ACB) (alterne interne).
m(∢BAE) = m(∢ABC) (alterne interne).
Însă, m(∢BAE) + m(∢BAC) + m(∢CAD) = = 180° (punctele E, A, D sunt coliniare).
Deci m(∢BAC) + m(∢ABC) + m(∢ACB) = m(∢BAC) + m(∢CAD) + + m(∢BAE) = 180°, q.e.d.

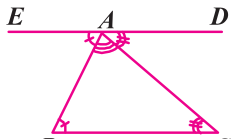


Fig. 173

În **figura 174** este descris un mijloc menit să verifice teorema conform căreia suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°. ΔABC este o foaie de hârtie în formă de triunghi, iar [AD] este înălţime. Hârtia se pliază astfel încât vârful A să se suprapună cu punctul D, apoi se duc prin pliere vârfurile B şi C în punctul D. În jurul punctului D, de aceeaşi parte a dreptei BC, apar cele trei unghiuri ale triunghiului. Efectuaţi efectiv acest experiment.

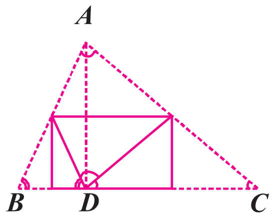


Fig. 174

Consecinţe

1. Într-un triunghi dreptunghic unghiurile ascuţite sunt complementare.
2. Unghiurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghi isoscel au măsura egală cu 45°.
3. Fiecare unghi ale unui triunghi echilateral are măsura egală cu 60°.

Unghi exterior unui triunghi

➲ Un unghi exterior unui triunghi este unghiul format de o latură a triunghiului cu prelungirea altei laturi a triunghiului

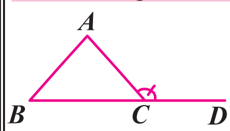


Fig. 175

În **fig. 175** unghiul ∢ACD este exterior triunghiului ABC.
Un triunghi are 6 unghiuri exteriore **(fig. 176)**.

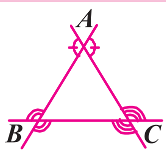


Fig. 176

Teorema unghiului exterior

➲ Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacentei lui.

Ipoteza:
Există ΔABC şi punctele D, E, F, $A \in (CD)$, $C \in (BF)$, $B \in (AE)$.
Concluzia:
m(∢BAD) = m(∢B) + m(∢C).
m(∢ACF) = m(∢A) + m(∢B).
m(∢CBE) = m(∢A) + m(∢C).

Demonstraţie:
$A \in (CD)$ implică m(∢BAD) = 180° – – m(∢A) = 180° – [180° – (m(∢B) + + m(∢C))] = m(∢B) + m(∢C) (am înlocuit m(∢A) cu 180° – [m(∢B) + + m(∢C)]). **(fig. 177)**

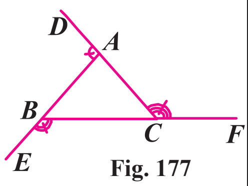


Fig. 177

Probleme rezolvate:

1. În **figura 178** unghiurile exterioare triunghiului ABC cu vârfurile în punctele B şi C au măsurile de 140° şi, respectiv, 105°. Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle A$ al triunghiului.

Rezolvare:

$m(\sphericalangle B) = 180° - 140° = 40°$; $m(\sphericalangle C) = 180 - 105° = 75°$.

Deci $m(\sphericalangle A) = 180° - (m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)) = 180 - (40 + 75°) = 75°$.

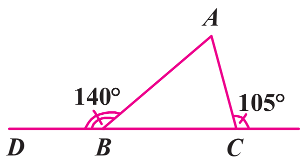


Fig. 178

2. a) Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle B) = 68°$. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle C$ se intersectează în punctul I. Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle AIC$. (**figura 179**)

b) Dacă $m(\sphericalangle BCX) = 135°$, aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.

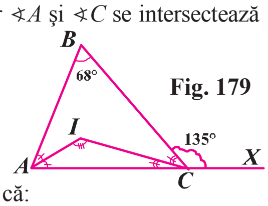


Fig. 179

Rezolvare:

a) Se ştie că $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB) = 180°$.

Dar $m(\sphericalangle ABC) = 68°$, de unde $m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB) = 112°$.

$(AI$ şi $(CI$ fiind bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$ şi, respectiv, $\sphericalangle BCA$ rezultă că:

$$m(\sphericalangle AIC) = 180° - [m(\sphericalangle IAC) + m(\sphericalangle ICA)] = 180° - \left[\frac{m(\sphericalangle BAC)}{2} + \frac{m(\sphericalangle ACB)}{2}\right] = 180° - \frac{112°}{2} = 124°.$$

b) $m(\sphericalangle BCX) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC)$ **(teorema unghiului exterior)** de unde $m(\sphericalangle BAC) = 135° - 68° = 67°$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Completaţi tabelul de mai jos ştiind că $m(\sphericalangle A)$, $m(\sphericalangle B)$ şi $m(\sphericalangle C)$ sunt măsurile unghiurilor unui triunghi ABC.

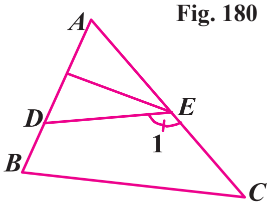
$m(\sphericalangle A)$	$m(\sphericalangle B)$	$m(\sphericalangle C)$
40°		50°
68°	110°	
	23°16′13″	49°43′47″

(*nota* 5)

2. Un triunghi dreptunghic are măsura unui unghi egală cu 23°15’13”. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului. (*nota* 5)

3. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC ştiind că: $m(\sphericalangle B) = 3 \cdot m(\sphericalangle C)$ şi $m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle C) = 65°$. (*nota* 7)

Fig. 180



4. Fie ABC o foaie de hârtie în formă de triunghi în care unghiul $\widehat{A}$ este ascuţit şi $AC > BC$. Îndoim colţul A astfel încât vârful A să cadă într-un punct oarecare D al laturii AB. Atunci hârtia capătă forma indicată în **figura 180**. Ce relaţie există între unghiurile $\widehat{A}$ şi $\hat{1}$? (*nota* 7)

5. În **figura 181** ştim că ΔABC este ascuţitunghic şi că $MA \perp AB$, $NB \perp BC$, $PC \perp CA$. Aflaţi suma măsurilor unghiurilor 1, 2 şi 3. (*nota* 7)

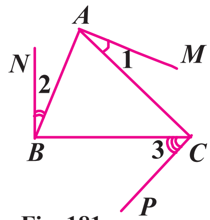


Fig. 181

6. Aflaţi măsurile unghiurilor unui triunghi ştiind că acestea sunt exprimate prin numere naturale pare consecutive. (*nota* 7)

Capitolul VII

VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU LUCRAREA SCRISĂ SEMESTRIALĂ

Semestrul I

TEST 24 (Varianta 1)

1. Scrieţi divizorii naturali ai numărului 12. (5p) (*nota* 5)

2. Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{34x}$ divizibil. cu 2. (5p) (*nota* 5)

3. Calculaţi c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. al numerelor 45,60 şi 180. (5p) (*nota* 5)

4. 28 de puieţi sunt distribuiţi pentru a fi plantaţi în mod egal pe rânduri. Câţi puieţi pot fi plantaţi pe un rând? (10p) (*nota* 5)

5. Calculaţi: **a)** $2^4 + 3^3 + 5^3 - 10^2 + 0^4 - 1^9$; **b)** $(2^4 \cdot 3^3 - 6^3) : 3^3$. (10p) (*nota* 5)

6. Desenaţi două unghiuri adiacente suplementare. Construiţi bisectoarele lor şi precizaţi măsura unghiului format de cele două bisectoare. (5p) (*nota* 5)

7. Suma dintre măsurile suplementului şi completentului unui unghi este 240°. Aflaţi măsura unghiului. (10p) (*nota* 7)

8. Punctele A, B, C, D sunt situate, în această ordine, pe o dreaptă astfel încât $AC = 15$ cm, $BC = 7$ cm şi $CD = 10$ cm. Dacă punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$, iar punctul N este mijlocul segmentului $[CD]$, calculaţi lungimea segmentului $[MN]$. (10p) (*nota* 7)

9. Moş Crăciun are în traistă un număr de creioane cuprins între 350 şi 400 pentru a fi distribuite copiilor. Moş Crăciun observă că dacă pune creioanele în pungi câte 5, 12, 18 sau 24 de fiecare dată rămân 3 creioane. Aflaţi câte creioane are Moş Crăciun în traistă. (10p) (*nota* 9)

10. În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ respectiv $\sphericalangle DOA$, astfel încât măsura primului unghi să fie $\frac{1}{3}$ din măsura celui de-al doilea şi cu 80° mai mică decât măsura celui de-al treilea unghi, iar al patrulea unghi are măsura egală cu dublul măsurii primului unghi.
a) Arătaţi că $m(\sphericalangle AOB) = 40^\circ$;
b) Justificaţi faptul că semidreapta opusă semidreptei $[OD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$. (10p) (*nota* 9)

11. Determinaţi cel mai mic număr natural, care împărţit la 7 dă restul 6, împărţit la 6 dă restul 5 şi este divizibil cu 5. (10p) (*nota* 10)

Timp de lucru 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu

REZULTATE. INDICAȚII. SOLUȚII. COMENTARII

ALGEBRĂ. Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1. *Operații cu numere naturale* **1. a)** 5211; **b)** 3645; **c)** 4928; **d)** 1015; **e)** 1712; **f)** 1158; **g)** 677; **h)** 79412; **i)** 319; **j)** 13489; **k)** 386; **l)** 38254; **m)** 45428; **n)** 6834; **o)** 2502. **2. a)** (27 + 63) + + (58 + 42) = 100 + 100 = 200; **b)** 7835 + (749 + 251) = 7835 + 1000 = 8835 etc. **3.** Fie *a, b, c* cele trei numere. Avem relațiil: $a + b + c = 750$; $a + b = 384$ şi $b + c = 492$, de unde $a + b + b + c =$ $= (a + b + c) + b = 876$, deci $b = 876 - 750 = 126$. $a = 384 - 126 = 258$ şi $c = 492 - 126 = 366$. **4.** Numărul cel mic (scăzătorul) este egal cu 5182 – 4387 = 795. Suma numerelor este 5977. **5. a)** $x = 482 - 352 = 130$; **b)** $x = 1000 - 382 = 618$; **c)** $x = 478 + 123 = 601$; **d)** $x = 500 - 150 = 350$; **e)** $x = 1500 - 831 = 669$; **f)** $x = 7132 + 389 = 7521$. **6. a)** 1242; **b)** 700; **c)** 16362; **d)** 11663; **e)** 4305; **f)** 86944; **g)** 826496; **h)** 187500; **i)** 416; **j)** 308; **k)** 20; **l)** 795. **7.** 25 · 6 · 20 = 3000 l apă. **8. a)** baza 5, exponentul 3; **c)** baza 7, exponentul 0; ...; **i)** nu are sens. **9. a)** 7^2; **b)** 10^0; **c)** 10^{10}; **d)** 0^1; **e)** nu are sens; **f)** 3^2; **g)** 2012^{2013}; **h)** 8^0. **10. a)** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256; 512, 1024, 2048, 4096; **b)** 0, 1, 1, 2000; **c)** 512, 1728, 81, 1000, 10000, 729; **d)** 2187, 121, 196, 27000, 15625, 303, 1; **e)** 512, 144, 15129, 0, 1, 1; **f)** 243, 729, 1331, 169, 62500; **g)** 25, 125, 625, 225, 3375; **h)** 49, 343, 2401, 289, 4913; **i)** 36, 216, 1296, 256, 4096; **j)** 64, 324, 784, 1444, 2304; **k)** 81, 361, 841, 1521, 2401; **l)** 10201, 10404, 10609, 10816, 1000000. **11. a)** 16; **b)** 32; **c)** 85; **d)** 160; **e)** 400; **f)** 68; **g)** 240; **h)** 144; **i)** 720; **j)** 680; **k)** 840; **l)** 234; **m)** 260; **n)** 1300; **o)** 800; **p)** 400. **12. a)** 14; **b)** 9; **c)** 40; **d)** 169; **e)** 64; **f)** 224; **g)** 1225; **h)** 324; **i)** 4. **13. a)** 9 – 8 + 1 = 2; **b)** 64 – 32 + 1 = 33; **c)** 343 – 64 – 9 = 270; **d)** $14^2 = 196$; **e)** $(7 + 4 - 1)^2 = 100$; **f)** $5^3 - 1 = 124$; **g)** 49 – 25 – 16 = 8; **h)** 64 – 32 – 16 = 16; **i)** 81 – 27 – 9 – – 3 – 1 = 41. **14. a)** 9 +361 + 484 = 36 + 289 + 529 etc. **15. c)** $(3 \cdot 11)^2 + (4 \cdot 11)^2 = (5 \cdot 11)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (3^2 + 4^2)11^2 = 5^2 \cdot 11^2$; **d)** $(3 \cdot 111)^2 + (4 \cdot 111)^2 = (5 \cdot 111)^2 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 111^2 + 4^2 \cdot 111^2 = 5^2 \cdot 111^2$; **e)** $(3 \cdot 1111)^2 + (4 \cdot 1111)^2 = (5 \cdot 1111)^2$ etc. **16. a)** $2^5 > 2^3$; **b)** $4^7 < 6^7$; **c)** $4^2 = 2^4$; **d)** $4^3 = 2^6$; **e)** $4^3 = 8^2$; **f)** $5^3 > 10^2$; **g)** $11^2 < 2^7$; **h)** $10^2 < 11^2$; **i)** $3^5 = 243$ şi $2^8 = 256$, deci $3^5 < 2^8$. **17. a)** 31; **b)** 59; **c)** 26; **d)** 33; **e)** 128; **f)** 483; **g)** 15; **h)** 11; **i)** 1452; **j)** 23; **k)** 158; **l)** 1200. **18. a)** câtul 28, restul 6; **b)** câtul 40, rest 3; **c)** câtul 135, rest 18; **d)** câtul 778, rest 26; **e)** câtul 121, rest 13; **f)** câtul 41, rest 500; **g)** câtul 151, rest 14; **h)** câtul 30, rest 92; **i)** câtul 98, rest 238. **19.** Fie *a* şi *b* cele două numere. Avem $a = 20b + 5$ şi $a + b = 152$, de unde $20b + 5 + b = 152$, adică $b = 7$ şi $a = 145$. **20.** 1664 şi 15. **21.** nu, deoarece $15 \nmid 220$. **22.** 1200 şi 200. **23.** Conform **teoremei împărțirii cu rest** avem: $a = 15 \cdot 6 + r$, unde $r < 6$. Se obțin numerele: 90, 91, 92, 93, 94, 95. Sunt şase numere. **24.** Cel mai mic număr este 207 = 9 · 23 şi cel mai mare este 792 = 9 · 88. Deci sunt 88 – 22 = 66 de numere. **25. a)** 2000 = (9 : 9 + 999) · (9 + 9) : 9; **b)** 2000 = 333 · (3 + 3) + (3 + 3) : 3.

26. a)

t	0	1	3	2	2 h 40 min	3 h 20 min
d	0	45	15	30	20	10

27. Dacă numărul porților este *x*, la prima poartă deținutul face cel mult *x* încercări, face un semn la cheia folosită, la a doua poartă face cel mult $x - 1$ încercări etc. În total, face cel mult $1 + 2 + ... + x = \frac{x(x+1)}{2}$ încercări. Dar $\frac{x(x+1)}{2} = 36$ conduce la $x = 8$. **28. a)** 3; **b)** 9; **c)** orice număr natural; **d)** 342; **e)** 336; **f)** 20; **g)** 3; **h)** 4. **29. a)** 133; **b)** 190; **c)** 3816; **d)** 2634; **e)** 20; **f)** 586; **g)** 443; **h)** 1700. **30. a)** 70; **b)** 2479; **c)** 658800; **d)** 117216; **e)** 171; **f)** 10 · 40 = 400; **g)** 8.

Test 1. **1.** 6. **2.** 36. **3.** 30. **4. a)** $0 \le n \le 5$; **b)** nu există. **5. a)** 20; **b)** 18; **c)** 3. **6. a)** 11; **b)** 24,96; **c)** 4. **7.** 0,63. **8. a)** 0,35 m; 0,0415 m; 0,00013 m; **b)** 0,0215m^2; 4200 m^2; 131400 m^2; **c)** 3,145 m^3; 300 m^3; 0,13 m^3. **9. a)** 75; **b)** 38. **10. a)** $(a, b) \in \{(0, 15), (4, 10), (8, 5), (12, 0)\}$; **b)** $(a, b) \in \{(1, 4)$ $(5, 2), (9, 1), (17, 0)\}$. **11.** 6 ore. **12.** Conform teoremei împărțirii cu rest avem relațiile: $n = 13a + 4$ şi $n = 23b + 3$, de unde $n = 13b + (10b + 3)$ şi $13b + (10b + 3) = 13a + 4$. $13 / 10b - 1$, b minim implică $b = 4$ şi $n = 95$.