Artur Bălăucă

Adrian Boţan **Cătălin Budeanu** **Ioan Ciobanaşu**

Gabriel Mîrşanu **Bogdan Maxim** **Dumitru Poroşniuc**

17
EDIŢII ALE CONCURSULUI INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „DIMITRIE POMPEIU“ BOTOŞANI
(2001 – 2017)

CLASELE III - XI

430 de probleme

Editura TAIDA
– IAŞI –

Introducere

Nordul Moldovei, inclusiv Botoșaniul, a dat României o pleiadă însemnată de intelectuali de mare valoare, inclusiv matematicieni, standarde ale culturii românești. Dintre matematicieni, probabil că cel mai important este Dimitrie Pompeiu.

Era, astfel, natural, ca tinerii elevi talentați și iubitori de matematică, să se bucure de un concurs, al cărui nume să fie legat de extraordinarul Pompeiu, cel mai citat matematician român până azi, îndeobște prin celebra conjectură zămislită în 1929.

Prin dragostea pentru matematica școlară, a regretatului profesor de geometrie de la Universitatea din Iași, Dan Brânzei, intelectual de excepție, cât și prin iubirea de matematică și probleme pentru cei mici, a unui celebru dascăl botoșănean, Artur Bălăucă, acum cincisprezece ani s-a născut acest concurs.

Sunt în România competiții de matematică cu zecile, unele remarcabile, altele mai îndoielnice. Concursul Dimitrie Pompeiu are, însă, o patină aparte: problemele fac în primul rând apel la intuiție și imaginație, în mult mai mare măsură decât la tehnici de rezolvări de probleme. În plus, faptul că în ultimii ani participă și copii din clasele primare, iar problemele pentru aceștia sunt extrem de aplicate spre gândirea liberă și corectă, aduce o noutate în peisajul educației prin competiții școlare.

Am venit la Botoșani, la concurs, cu mare plăcere în ultimii ani. Îl consider un festival al bucuriei matematice și al reîntâlnirii cu dragii colegi moldoveni, mulți dintre ei, printre autorii acestei cărți.

Am remarcat de fiecare dată aplecarea autorităților botoșănene spre a asigura desfășurarea concursului în condițiile cele mai bune, pentru copii: de la Consiliul Județean, Primărie și până la Inspectoratul Școlar Județean.

Această carte este o colecție de bijuterii matematice, în mare parte cizelate de către dascălii din zonă. Minunat!

Radu Gologan

ARGUMENT

„Nu adevăru-i rostul
Ci drumul tău spre el."
(Dan Brânzei – *Caut*)

Am apucat o vreme când se înscăunase dinspre Răsărit o vorbă de fală: ***Noi muncim, nu gândim!*** Mă tem că o să apuc alte vorbe falnice dinspre Apus: ***Noi câştigăm, nu gândim!*** Să fie pe la casele lor gândurile astea! Unii aveau puterea, alţii au banul (ceea ce e cam acelaşi lucru), noi ne mai apărăm (câteodată) *sărăcia şi nevoile şi neamul.*

Avem copii sănătoşi, cuminţi şi deştepţi. Mai bântuie pe la unii gândul că or trece ca gâsca prin apă şi or ajunge la câinii cu colaci în coadă. Chiar dacă or fi acuma mulţi de aceştia, nu ei sunt importanţi şi nu de dânşii atârnă devenirea noastră.

Cei buni, cu aplecare spre dreapta ştiinţă a matematicii, s-au deprins să se tot întâlnească în concursuri: ***Noi nu tocim, ci gândim!***

Bănuind că dreptatea este de partea lor, colegii au strâns sclipiri de prin concursuri Botoşănene ce s-au învrednicit de numele matematicianului **Dimitrie Pompeiu.** Poate nu vor fi prea multe pagini să cadă greu peste picioare, dar este aici pildă şi judecată care să priiască minţilor iscoditoare.

Mă bucur că am avut bună ocazie să fiu şi eu pe la înfruntările acestea. Răsfoind acuma cartea îmi revin în faţa ochilor eroii lor: copii îndârjiţi să spargă enigme, să le aşeze în cugetare limpede, să binemerite diplome şi premii, să închege drepte prietenii. Poate, exemplul lor va îndreptăţi strădanii.

Cu respect faţă de ***cei ce gândesc,***

Prof. univ. dr. Dan Brânzei

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN „DIMITRIE POMPEIU”

EDIŢIA I – 2 iunie 2001

CLASA a V-a

1. La o împărţire de numere naturale, suma dintre împărţitor, cât şi rest este egală cu deîmpărţitul. Să se arate că împărţitorul este egal cu câtul.

2. Să se determine un număr impar de numere naturale consecutive a căror sumă este 2001.

3. Fie numerele naturale a şi b astfel încât $a < b$. Să se arate că $a^{n+1} + b^n \le a^n + b^{n+1}$, oricare ar fi $n \in N^*$.

CLASA a VI-a

4. Fie triunghiul ΔABC cu măsurile unghiurilor direct proporţionale cu numerele 2, 4 şi 6 $\left(m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle B) > m(\sphericalangle C)\right)$. Dacă M este simetricul vârfului A faţă de dreapta BC, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BMC$ intersectează dreapta AB în N, să se demonstreze că $(AM) \equiv (AN)$ şi să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului MNC.

5. a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$3xy + 2x = 5y + 1.$$

b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} \ge \frac{5}{6}$.

6. Arătaţi că nu există trei numere naturale prime astfel încât adunându-le două câte două să se obţină sume ce au 2, 3 şi, respectiv, 5 divizori naturali.

CLASA a VII – a

7. Să se determine $x \in Z$, $y, z \in Z^*$ ce verifică relaţia: $x + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2001$.

8. Să se arate că: **a)** $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} \geq \frac{5}{6}$;

b) $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{3}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} + \ldots + \frac{n+1}{\sqrt{n(n+1)+\sqrt{n(n+1)}}} \geq n, n \in N^*$.

(*Niculai Solomon*)

9. Fie *ABCD* un patrulater convex, $M \in (AB), P \in (CD)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD} = k$. Construim $MN \| AC$, $N \in BC$ şi $MQ \| BD$, $Q \in AD$.

a) Demonstraţi că *MNPQ* este paralelogram.

b) Aflaţi valoarea raportului ariilor patrulaterelor *MNPQ* şi *ABCD* în funcţie de *k*.

c) Aflaţi *k* astfel încât raportul ariilor patrulaterelor să aibă valoarea maximă.

CLASA a VIII - a

10. Să se rezolve în ℝ:

a) $x + [x] = 2x \cdot [x] + \frac{1}{2}$;

b) $x + [x] > x[x]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

11. Fie funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}; a < b$;

$$f(x) = m \cdot x + n;\ m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0.$$

a) Arătaţi că valoarea maximă a funcţiei *f* este: *max* (*f*(*a*), *f*(*b*)).

b) Dacă *x, y, z, a, b, c* $\in [0,1]$, demonstraţi inegalitatea:

$$ax + by + cz - abxy - acxz - bcyz - 1 \leq 0.$$

12. Fie *A, B, C, D* patru puncte necoplanare astfel încât $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Dacă $BC = 3$ cm, $CD = 3\sqrt{7}$ cm, $BD = 6$ cm şi distanţa de la punctul *A* la planul (*BDC*) este de $\frac{10\sqrt{21}}{7}$ cm. Se cere:

a) Arătaţi că proiecţia lui *A* pe planul (*BCD*) este ortocentrul triunghiului ΔBCD.

b) Determinaţi măsura unghiului diedru dintre planele (*ACD*) şi (*BCD*).

c) Să se determine distanţa de la *B* la planul (*ADC*).

EDIŢIA a II-a, 18 mai 2002

CLASA a V-a

13. Dacă $2^n + 1 = pq, n \geq 1$, arătaţi că *p* - 1 şi *q* - 1 se divid cu aceeaşi putere a lui 2.

14. Pentru vopsirea unui cub cu latura de 6 dm se folosesc 180 g vopsea.

a) Dacă înainte de vopsire s-ar înlătura câte un cubuleţ cu latura de 1 dm, din fiecare colţ al cubului, câtă vopsea ar fi necesară pentru vopsirea corpului rămas.

b) Dacă s-ar tăia cubul vopsit în cubuleţe cu latura de 2 dm, câtă vopsea ar mai fi necesară pentru vopsirea suprafeţelor noi apărute.

15. Să se găsească toate tripletele de numere prime *a, b, c,* care satisfac inegalitatea: *abc* < *ab* + *bc* + *ca*, unde *a* este un număr prim şi par.

CLASA a VI-a

16. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, astfel încât numerele $2x - 3y$, $3z, z+1$, să fie direct proporţionale cu numerele $2, 2x+3y, 19$.

a) Să se determine numerele *x, y, z*.

b) Să se arate că $x^p + y^{2k} + z^m - 2$ este divizibil cu 4 oricare ar fi $p, k, m \in \mathbb{N}^*$, unde *x, y, z* au fost determinate la punctul **a)**.

17. a) Calculaţi suma $1+2^0+2^1+2^2+...2^{2001}$.

b) Fie $S=(-1)^1\cdot(1+2)+(-1)^2\cdot(1+2+2^2)+...+(-1)^{2002}\cdot(1+2+2^2+...+2^{2002})$.

Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $(2^2-1)\cdot S=x^2-4$.

18. Fie triunghiul ABC ascuţitunghic cu $[AB]\equiv[AC]\neq[BC]$. Pe laturile AB şi AC se consideră punctele M şi, respectiv, N astfel încât $[BM]\equiv[CN]$. Picioarele perpendicularelor din punctul A pe dreptele CM şi BN se notează cu D şi, respectiv, E. Arătaţi că:

a) $AI\perp DE$, unde $BE\cap CD=\{I\}$;

b) Triunghiul DEJ este isoscel, unde $\{J\}=BD\cap CE$;

c) Punctele A, I, J sunt coliniare.

d) $DE\parallel BC$.

CLASA a VII-a

19. Să se rezolve ecuaţia: $2x^2-(2y+1)x+y=2003,\ x,y\in\mathbb{Z}$.

20. Să se arate că triunghiul, având ca laturi diagonala, înălţimea şi linia mijlocie a unui trapez isoscel, este dreptunghic.

21. În triunghiul isoscel ABC, cu $[AB]\equiv[AC]$, considerăm $D\in(AB)$, $E\in(AC)$ astfel încât $[AE]\equiv[BD]$ şi $AE<\frac{AC}{2}$. Fie F mijlocul segmentului DE. Notăm $DE\cap BC=\{H\}$ şi $AF\cap BC=\{G\}$. Arătaţi că:

a) $[AF]\equiv[FG]$; **b)** $HB\cdot GC=HG\cdot BG$. (*Sorin Peligrad,* Piteşti)

CLASA a VIII-a

22. Se dă fracţia $\frac{7n^3-8n^2-3n+4}{7n^3+6n^2-5n-4}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că dacă $n\geq 2$ atunci fracţia se simplifică printr-un număr natural mai mare sau egal cu 22.

b) Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale n pentru care fracţia se simplifică prin 2002.

23. a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{x^3}{x^2+x+1} \le x+a$, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$1+\frac{8}{3}+\frac{27}{7}+....+\frac{n^3}{n^2-n+1} > \frac{n(3n+1)}{6}.$$

Ediţia a III-a, 17 mai 2003

CLASA a VI-a

25. Se consideră numerele:

$$A = \frac{1}{a+b_1} + \frac{2}{a+2b_2} + \frac{3}{a+3b_3} + \ldots + \frac{n}{a+nb_n} \text{ şi}$$

$$B = \frac{b_1}{a+b_1} + \frac{4b_2}{a+2b_2} + \frac{9b_3}{a+3b_3} + \ldots + \frac{n^2 b_n}{a+nb_n},$$ unde *a, b_1, b_2, b_3, …, b_n* sunt numere raţionale pozitive $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\frac{A}{B} = \frac{n}{a}$, iar *n* este număr par, demonstraţi că $B \in \mathbb{N}$. (*Ioan Ţicalo,* Botoşani)

26. Găsiţi cel mai mic număr natural nenul *n* care satisfice condiţia: dacă *n* se divide cu *p* - 1 şi *p* este număr natural prim, atunci *n* se divide cu *p*, oricare ar fi *p.*

27. Fie triunghiul ABC şi $EF \parallel BC$, $E \in (AB)$, $F \in (AC)$. Să se demonstreze că $AB = BC$, dacă şi numai dacă $BE + EF = BC$.

(*Ştefan Smarandache,* Bucureşti)

CLASA a VII-a

28. a) Determinaţi perechile de numere întregi *(x, y)* astfel încât $2 \cdot x^2 + 3 \cdot y^4 = 2003$;

b) Arătaţi că există trei numere naturale pătrate perfecte a căror sumă este 2003;

c) Determinaţi numărul real *x* astfel încât:

$16\sqrt{x+64} + 75\sqrt{625-x} + \frac{x}{2} = 2003$. (*Constantin Guriţă,* Botoşani)

29. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC, $AB = 1$ cm, se deplasează două puncte M şi N astfel încât drumul între M şi N, măsurat pe triunghi, să aibă lungimea constantă 0,5 cm. Să se arate că mijlocul segmentului $[MN]$ se găseşte întotdeauna pe laturile unui hexagon şi să se calculeze perimetrul acestuia.

(*Dorin Popovici*, Bucureşti)

30. Se dă triunghiul echilateral ABC de latură a.

a) Dacă $M \in (BC)$, $BM = MC$ şi $N \in (AC)$, calculaţi minimul perimetrului triunghiului BMN.

b) Dacă $M \in (BC)$, $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$, $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, calculaţi minimul perimetrului triunghiului MPQ.

(*Constantin Guriţă*, Botoşani)

CLASA a VIII-a

31. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Se cere:

a) Să se determine o condiţie necesară şi suficientă astfel încât intersecţia graficului funcţiei f cu axa OX este punctul P de abscisă x_p, $k < x_p < k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ (trecând de la puncte situate sub axa OX la puncte situate deasupra axei OX).

b) Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, astfel încât $G_f \perp G_g$, $G_f \cap G_g = \{A\}$, unde $A(1, 0)$ şi să se traseze cele două grafice în acelaşi sistem de axe, XOY.

c) Ştiind că $OM \perp G_f$ şi $OQ \perp G_g$, aflaţi $\mathcal{A}_{AMQ}$.

(*Mihai Ţarcă*, Vatra Dornei)

32. a) Calculaţi $\frac{1}{1,\underbrace{00...01}_{89\,cifre}}$ cu 180 de zecimale exacte.

b) Calculaţi partea întreagă şi primele 2003 zecimale ale numărului A = $\sqrt{\underbrace{11...1}_{4006\,cifre}}$.

(*Ciprian Apetrei*, Botoşani)

33. Punctul M este situat în interiorul bazei $ABCD$ a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, Ştiind că $MA = a$, aria bazei $ABCD$ este $4a^2$, $m(\sphericalangle BMC') = m(\sphericalangle A'MD) = 90^0$, iar $A'B \perp C'M$, să se afle aria totală a paralelipipedului.

(*Ştefan Smarandache*, Bucureşti)

EDIŢIA a IV-a, 15 mai 2004

Clasa a V-a

34. 1. Se dau cinci numere naturale cu proprietatea că suma oricăror două dintre ele se divide cu 5. Arătaţi că fiecare dintre cele cinci numere se divide cu 5.

2. Determinaţi cel mai mare număr de elemente din mulţimea A = {1; 2; 3; ... ; 100} care au proprietatea că suma oricăror două dintre ele se divide cu 6.

***

35. 1. Câte numere naturale de forma $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$), au proprietatea că suma cifrelor oricărui număr este 27, şi una dintre cifre este 2?

2. Arătaţi că, dacă suma cifrelor numărului $\overline{abcd}$ este 27, atunci numărul $N = \overline{abcd} + \overline{dcba}$ se divide cu 27.

***

36. a) Din numărul 1 se scad, pe rând, toate numerele de forma $\overline{0,abc}$ ($a + b + c \neq 0$), apoi se adună rezultatele obţinute. Care este suma finală?

b) Arătaţi că, printre oricare 500 de numere de forma $\overline{0,abc}$ ($a + b + c \neq 0$), există două a căror sumă este egală cu 1.

(*Mircea Fianu*, Bucureşti)

Clasa a VI-a

37. Perechea $(m; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se numeşte soluţie a ecuaţiei $ax + by = c$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) dacă $a \cdot m + b \cdot n = c$.

a) Pentru ecuaţia $29x - 23y = 1$, determinaţi soluţia de forma $(4 ; n)$;

b) Determinaţi o soluţie a ecuaţiei $29x - 23y = -47$;

c) Arătaţi că ecuaţia $29x - 23y = -47$ are o singură soluţie, $(m ; n)$, cu proprietatea că $|m| \leq 10$ şi $|n| \leq 10$.

(*Mircea Fianu*, Bucureşti)

38. În urna A se află n bile albe numerotate de la 1 la n, iar în urna B se află n bile negre numerotate de la 1 la n. Din urna B se transferă o bilă în urna A. Astfel, suma numerelor înscrise pe bilele din urna A devine 2004.
a) Arătaţi că $n > 60$;
b) Determinaţi n;
c) Care este cel mai mare număr de bile albe care trebuie transferate din urna A în urna B pentru ca suma numerelor înscrise pe bilele din urna B să fie 2004? (*Mircea Fianu*, Bucureşti)

39. Se dă triunghiul isoscel ABC ($m(\sphericalangle BAC) = 100°$). Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$ intersectează dreapta AB în punctul D. Perpendiculara din punctul A pe dreapta CD intersectează dreapta BC în punctul E, iar $F \in (BC)$ astfel încât $CF = CD$. Arătaţi că:
a) Triunghiul DEA este isoscel;
b) Triunghiul DEF este isoscel;
c) $BC = CD + DA$.

Clasa a VII-a

40. a) Arătaţi că, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, numărul $a = x^2 + x + 1$ este pătratul unui număr real. **b)** Arătaţi că, dacă x şi y sunt numere reale astfel încât $x < y$, atunci $x^3 < y^3$. **c)** Determinaţi cel mai mare număr natural n şi mulţimea $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\} \subset \mathbb{R}$ ştiind că $A = \{a_1^3; a_2^3; ...; a_n^3\}$. (*Mircea Fianu,* Bucureşti)

41. 1. Un dreptunghi are dimensiunile $a = m \cdot n$ şi $b = m + n$, unde m şi n sunt numere naturale nenule. În interiorul dreptunghiului fixăm la întâmplare N puncte ($N \in \mathbb{N}^*$). Arătaţi că:
a) Dacă $N = m \cdot n(m + n) + 1$, atunci cel puţin două dintre cele N puncte se află în interiorul unui cerc cu raza egală cu 1, 42;
b) Dacă $N = m + n + 1$, atunci cel puţin două dintre cele N puncte se află la o distanţă mai mică sau egală cu $\sqrt{m^2 + n^2}$, unul faţă de celălalt.

2. Rezolvaţi în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuaţia: $a - b = \sqrt{b^2 - 2a}$.
(*Mircea Fianu, Cristian Mangra*, Bucureşti)

EDIȚIA a XVI-a, 14 mai 2016
Clasa a III-a

359. a) O ladă cu mere cântărește 20 de kilograme. După ce se scoate a treia parte din cantitatea de mere, lada cântărește 14 kilograme. Câte kilograme de mere au fost în ladă și cât cântărește lada goală? Justificați! *(G.M. 12/2015)*
b) Smărândița împachetează 32 de mingi de tenis în pungi de câte 3 mingi sau 4 mingi în fiecare pungă. De câte pungi are nevoie Smărândița? Află toate posibilitățile. Justificați! *(Ioan Ciobanașu)*

360. a) Aflați toate numerele naturale mai mari decât 5010 și mai mici decât 6400 care sunt egale cu răsturnatele lor (exemple: răsturnatul numărului 5612 este 2165, iar a numărului 4002 este 2004).
b) Ce număr natural de trei cifre are suma cifrelor 26 și succesorul său are suma cifrelor 9? Justificați! *(Cătălin Budeanu)*

361. Nasul lui Pinocchio măsoară 12 cm. După ce spune o minciună el rostește întotdeauna un adevăr, iar după un adevăr el debitează o minciună. La fiecare minciună pe care o spune, nasul său crește cu 8 cm, iar la fiecare adevăr scade cu 6 cm. Dacă Pinocchio a spus cel puțin o minciună, aflați după câte minciuni și câte adevăruri rostite nasul lui ajunge la lungimea:
a) inițială; **b)** de 16 cm. Justificați! *(Artur Bălăucă)*

362. În parcul Mihai Eminescu din Botoșani o cioară zboară pe prima creangă și croncăne o dată, apoi pe a doua creangă și croncăne de 2 ori, apoi pe a treia creangă și croncăne de 3 ori și așa mai departe. Pe a câta creangă se află cioara când croncăne a 150-a oară? Justificați răspunsul! *(Cătălin Budeanu)*

Clasa a IV-a

363. a) Un ciclist a parcurs un sfert din traseul pe care îl avea de parcurs. Dacă ar fi mers încă 16 km ar mai fi avut de parcurs un sfert din traseu. Ce lungime are traseul?
b) Câtul împărțirii unui număr natural nenul (diferit de zero) la 7 este jumătate din rest. Să se afle toate numerele cu această proprietate.

EDIŢIA a XVII-a, 12 - 14 mai 2016
Clasa a III-a

395. a) Dacă la un număr se adaugă sfertul lui, atunci obținem un număr cu 60 mai mare decât jumătatea numărului dat. Care este numărul? Justificați!

b) Smărăndița împachetează 32 mingi de tenis în pungi de câte 3 mingi sau 4 mingi în fiecare pungă. De câte pungi are nevoie Smărăndița? Află toate variantele.

(G.M. 10/2016, supliment, Nicolae Ivăşchescu)

396. Familia Popescu are 3 copii. Doi dintre ei sunt gemeni. Vârstele fiecărui copil sunt exprimate în ani prin numere naturale și fiecare are cel puțin 2 ani.

Aflați vârstele celor 3 frați dacă:

a) Frații au împreună 15 ani.

b) Produsul vârstelor celor trei copii este egal cu 36. Găsiți toate posibilitățile.

(Cătălin Budeanu)

397. Un pătrat se numește **magic** dacă suma numerelor de pe fiecare linie orizontală, verticală și diagonală este aceeași.

Alăturat aveți un pătrat care poate deveni **magic** dacă îi completați numerele care lipsesc, știind că $a + b + c = 11$. Completați pătratul pentru a deveni **magic**. Justificați!

a	3	8
	5	c
		b

(Artur Bălăucă)

398. Problema suplimentară. Gigel merge într-un picnic cu familia sa la munte. La prânz el trebuie să frigă pe grătar 7 păstrăvi pe ambele părți. Dacă un păstrăv se frige pe o parte în patru minute și pe grătar încap doar doi păstrăvi, cum putem frige cât mai repede cei șapte păstrăvi ? În câte minute ? Justificați, completând eventual un tabel.

(xxx)

426. Problema suplimentară. Demonstrați că pentru orice numere complexe x, y, z de modul 1 are loc inegalitatea:

$$|1+x|+|1+y|+|1+z|+|x+y|+|y+z|+|z+x| \geq 4.$$

(Bogdan Maxim)

Clasa a XI -a

427. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \dfrac{3}{2}$ și $x_{n+1} = x_n + \dfrac{n}{x_n}$, pentru $n \geq 1$. Arătați că șirul $\alpha_n = x_n - n$, cu $n \geq 1$, este convergent și aflați-i limita.

(Gazeta Matematică 2, Supliment)

428. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_{2017}(\mathbb{R})$ cu $\operatorname{rang}(3I_{2017} - A) = m$, $\operatorname{rang}(2I_{2017} - A) = n$ și $m > n$.

a) Demonstrați că $m \geq 1009$, iar dacă $m = 1009$, aflați n.

b) Dați exemplu de matrice A, pentru care $m = 1009$.

(Adrian Boțan)

429. Fie a o constantă reală. Arătați că funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$, este injectivă dacă și numai dacă $a = \dfrac{1}{2}$.

430. Problema suplimentară. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale, descrescător, cu $a_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$. Știind că șirul $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ este convergent, demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

(Dănuț Aramă)

SOLUŢII, INDICAŢII, RĂSPUNSURI. COMENTARII

1. Fie I, C, R, D împărţitorul, câtul, restul şi, respectiv, deîmpărţitul. Din relaţiile $D = I \cdot C + R$, $R < I$ şi $I + C + R = D$ rezultă $I + C = I \cdot C$, de unde $I(C\text{-}1) = C$, adică $C\text{-}1/\,C$ sau $C\text{-}1/\,(C\text{-}1) + 1$, $C\text{-}1/1 \Rightarrow C = 2$ şi $I = 2$.

2. Fie $n + 1$, $n + 2$, …, $n + (2k + 1)$ numerele consecutive. Avem: $(n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + 2k + 1) = 2001 \Rightarrow \underbrace{n + n + \ldots + n}_{2k+1 \text{ termeni}} + 1 +$

$$+ 2 + \ldots + (2k+1) = (2k+1)n + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)\cdot(n+k+1) =$$

$= 2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29 \Rightarrow 2k + 1 \in \{1, 3, 23, 29, 69, 87, 667, 2001\}$. Se obţine soluţie pentru $2k + 1 \in \{3, 23, 29\}$. Numerele sunt: 666, 667, 668 sau 76, 77,…, 98 sau 55, 56, …,83.

3. $a^{n+1} + b^n \le a^n + b^{n+1} \Leftrightarrow a^n(a-1) \le b^n(b-1)$; $a = 0$ şi $b = 1 \Rightarrow a^{n+1} + b^n = a^n + b^{n+1}$. Dacă $a = 0$ şi $b > 1 \Rightarrow b^n(b-1) > 0$ şi $a^n(a-1) = 0$ etc. Dacă $a = 1$ atunci $b \ge 2$ şi $b^n(b-1) > 0$, iar $a^n(a-1) = 0$ etc. Dacă $a > 1$, cum $b > a$ rezultă $b^n > a^n$ şi $b - 1 > a - 1$ etc.

4. $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle B) = 60^0$, $m(\sphericalangle C) = 30^0$. În triunghiul ΔAMN, $m(\sphericalangle AMN) = m(\sphericalangle ANM) = 15°$. Triunghiul ANC este dreptunghic isoscel, $m(\sphericalangle NMC) = 45°$, $m(\sphericalangle MNC) = 30°$, $m(\sphericalangle MCN) = 150°$.

5. a) $3xy + 2x = 5y + 1 \Leftrightarrow x(3y + 2) = 5y + 1 \Leftrightarrow 3x(3y + 2) = 5 \cdot 3y + 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x(3y + 2) = 5(3y + 2) - 7$. Deci $3y + 2\,/7$, de unde $3y + 2 \in \{-7; -1; 1; 7\}$, etc.

b) $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}\ge\frac{5}{6}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}\right)\ge\frac{5}{6}.$$
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\ge\frac{n}{2n}=\frac{1}{2} \text{ şi } \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}\ge\frac{n}{3n}=\frac{1}{3} \text{ etc.}$$

6. Presupunem că există numerele a, b, c ($a \le b$) cu proprietatea din enunţ. Dacă $a + b$ are 2 divizori, atunci $a + b$ este prim şi $a = 2$, iar b este impar.

I. Dacă $a + c$ are 3 divizori şi $b+c$ are 5 divizori, atunci $a + c = q^2$, q prim şi $b + c = p^4$, p prim, de unde rezultă $c = 2$, contradicţie pentru că $c > 2$.

II. Dacă $a + c$ are 5 divizori şi $b + c$ are 3 divizori, atunci $a + c = m^4$, m prim şi $b + c = n^2$, n prim, de unde $c = 2$, contradicţie pentru că $c > 2$.

7. $$x+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2001\Leftrightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2001-x\in\mathbb{Z};\ y,z\in\mathbb{Z}^*\Rightarrow|z|\ge1 \text{ şi } |y|\ge1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{|z|}\le1 \text{ şi } \frac{1}{|y|}\le1\Rightarrow-2\le\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le2 \text{ şi } \frac{1}{y}+\frac{1}{z}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\in\{-2;-1;0;1;2\}.$$