

ARTUR BĂLĂUCĂ

CĂTĂLIN BUDEANU

TOADER MĂGUREAN

ARITMETICĂ
ALGEBRĂ GEOMETRIE

Clasa a VI-a

- **Itemi cu note**
- **Modele de teste ce conțin itemi cu note și bareme de notare**
- **Teste inițiale**
- **Variante de teste pentru lucrarea scrisă semestrială**

EDITURA TAIDA

- IAȘI -

Ecuția succesului în viață

Einstein se feliicită:

„– Am descoperit formula succesului în viață.

Ea se exprimă prin ecuația:

$$X = M + O + S, \text{ unde:}$$

X reprezintă succesul în viață

M – munca

O – odihna

S – stăpânește-ți limba!“

Introducere

În anul școlar 2008 – 2009 programa școlară a suferit majore modificări fiind valabilă și în anul școlar 2015 – 2016 cu diferențe nesemnificative. Evident, manualele alternative fiind complet depășite sunt neutilizabile.

Intenția declarată a autorilor este de a se alinia programei actuale, iar lucrarea elaborată se constituie într-un auxiliar ales de colegul nostru „rătăcit”, poate, printre atâtea culegeri de probleme, grupate după anul sau locul în care au fost propuse.

Lucrarea prezintă considerații teoretice la noțiunile de bază ale programei plecând de la situații cotidiene întâlnite de elev, prin modele de exerciții și probleme rezolvate, ce pot fi utilizate la sistematizarea și aprofundarea cunoștințelor, cât și în activități opționale.

Prezenta lucrare grupează elementele de conținut ale programei școlare actuale în unități de învățare, cu respectarea logicii interne de dezvoltare a conceptelor matematice.

Pentru formarea competențelor europene specifice studiului matematicii în gimnaziu, lucrarea a fost astfel concepută încât să contribuie la formarea obișnuinței elevilor de a apela la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice.

Problemele sunt compartimentate pe capitole, unități de învățare și chiar pe lecții cu rezolvări bine echilibrate. Pentru fiecare lecție au fost selectate probleme reprezentative care contribuie la aprofundarea noțiunilor ce le conțin.

Problemele sunt variate și de conținut, fiind evitate cele artificial concepute după clișee sterile, cum se găsesc, din abundență, prin diverse culegeri.

Lucrarea constituie un suport eficient pentru profesori, elevi și părinți, pentru o evaluare și autoevaluare cât mai obiectivă, de aceea fiecare exercițiu are specificată nota corespunzătoare.

De asemenea, lucrarea cuprinde 41 modele de teste, din care 10 variante de teză pe semestrul I, cu itemi specifici intervalului de evaluare, astfel: se obțin 40 de puncte din itemi de nota 5; câte 20 de puncte din itemi de nota 7, respectiv 9; 10 puncte din itemi de nota 10 și 10 puncte se acordă din oficiu.

În afara testelor clasice am introdus și teste grilă și cu răspuns deschis. La testele grilă elevul trebuie să aleagă răspunsul corect din variantele de răspunsuri date, știind că unul și numai unul din răspunsuri este corect, iar la testele cu răspuns deschis trebuie completat spațiul punctat cu răspunsul corect.

După prezentarea enunțurilor problemelor propuse urmează soluții, indicații, răspunsuri și comentarii.

Problemele asemănătoare cu precedentele au primit indicații parțiale sau numai răspunsurile de rigoare, lăsându-le elevilor posibilitatea de a-și dovedi ingeniozitatea și creativitatea prin găsirea unor soluții deosebite.

În general, soluțiile prezentate nu sunt exhaustive, lăsând rezolvitorilor posibilitatea de a contribui efectiv la completări. Totuși, în prezentarea unor soluții, am avut în vedere rigurozitatea, insistând asupra cazurilor ce pot să apară în unele probleme în funcție de parametrii pe care acestea îi conțin, dorind să formăm la elevi deprinderea de a căuta toate soluțiile unei probleme.

Suntem recunoscători și adresăm mulțumirile noastre atât colegilor, părinților, cât și elevilor care ne-au dat sugestii și sfaturi competente, care ne-au condus la completarea lucrării.

Artur Bălăucă

Cuprins

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

Bre-
viar Enun-
turi Solu-
ții

Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1.	Operații cu numere naturale	7	8	272
I.2.	Reguli de calcul cu puteri. Compararea și ordonarea puterilor	14	15	273
I.3.	Divizor, multiplu. Criterii de divizibilitate cu 10, 2, 5, 3, 9	19	20	274
I.4.	Numere prime și numere compuse	23	23	275
I.5.	Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	25	26	275
I.6.	Proprietăți ale relației de divizibilitate în \mathbb{N}	28	29	276
I.7.	Divizori comuni a două sau a mai multor numere naturale, c.m.m.d.c.; numere prime între ele	30	33	277
I.8.	Multipli comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.m.c.; relația dintre c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.	35	36	277
I.9.	Probleme aplicative care se rezolvă folosind divizibilitatea în \mathbb{N}		38	278

Capitolul II. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE POZITIVE, \mathbb{Q}_+

II.1.	Fracții echivalente; fracție ireductibilă; noțiunea de număr rațional; forme de scriere a unui număr rațional; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Aducerea fracțiilor la un numitor comun. Compararea și ordonarea numerelor raționale	41	49	279
OPERAȚII CU NUMERE RAȚIONALE POZITIVE				
II.2.	Adunarea numerelor raționale pozitive. Proprietăți	56	58	282
II.3.	Scăderea numerelor raționale pozitive	62	63	283
II.4.	Înmulțirea numerelor raționale pozitive. Proprietăți	67	68	284
II.5.	Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr rațional pozitiv; reguli de calcul cu puteri	70	71	285
II.6.	Împărțirea numerelor raționale pozitive	72	73	286
II.7.	Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive	76	77	287
II.8.	Media aritmetică ponderată a unor numere raționale pozitive	79	81	288
II.9.	Ecuatii în mulțimea numerelor raționale pozitive. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	83	85	288

Capitolul III. RAPOARTE ȘI PROPORȚII

III.1.	Rapoarte	92	93	290
III.2.	Procente; probleme în care intervin procente	96	98	291
III.3.	Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor; aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție; proporții derivate	104	107	292
III.4.	Mărimi direct proporționale; regula de trei simplă; șir de rapoarte egale	110	111	293
III.5.	Mărimi invers proporționale. Regula de trei simplă	114	116	294
III.6.	Elemente de organizare a datelor; reprezentarea datelor prin grafice	118	119	294
III.7.	Experiență aleatoare. Probă. Eveniment. Probabilități	123	124	295

Capitolul IV. NUMERE ÎNTREGI

IV.1.	Mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} ; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axă a numerelor întregi; valoarea absolută (modulul); compararea și ordonarea numerelor întregi	129	132	296
OPERAȚII ÎN MULȚIMEA \mathbb{Z}				
IV.2.	Adunarea numerelor întregi; proprietăți	135	138	297
IV.3.	Scăderea numerelor întregi	139	140	297
IV.4.	Înmulțirea numerelor întregi; proprietăți; mulțimea multiplilor unui număr întreg	142	143	297
IV.5.	Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului; mulțimea divizorilor unui număr întreg	145	146	298
IV.6.	Puterea unui număr întreg cu exponent număr natural; reguli de calcul cu puteri	148	149	298
IV.7.	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	151	151	299

IV.8.	Ecuatii în Z ; probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	152	153	299
IV.9.	Inecuații în mulțimea numerelor întregi	155	156	300

GEOMETRIE

Capitolul I

I.1.	Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment (descriere, reprezentare, notații). Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă; puncte coliniare; „prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una”	159	161	301
I.2.	Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele	164	165	301
I.3.	Lungimea unui segment; distanța dintre două puncte. Segmente congruente, construcția unui segment congruent cu un segment dat, mijlocul unui segment, simetricul unui punct față de un punct	166	170	302

Capitolul II. UNGHIIURI

II.1.	Definiție, notații, elemente; interiorul unui unghi; exteriorul unui unghi; unghi nul; unghi cu laturile în prelungire	175	176	304
II.2.	Măsurarea unghiurilor cu raportorul; unghiuri congruente; unghi drept, unghi ascuțit, unghi obtuz	178	179	304
II.3.	Calculul cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale. Unghiuri suplementare, unghiuri complementare	183	184	305
II.4.	Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi	186	187	305
II.5.	Unghiuri opuse la vârf, congruența lor; unghiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor	190	192	306

Capitolul III. CONGRUENȚA TRIUNHIURILOR

III.1.	Triunghi. Clasificare. Perimetrul triunghiului. Unghi exterior unui triunghi	197	198	307
III.2.	Construcția triunghiurilor	199	200	
III.3.	Congruența triunghiurilor; metoda triunghiurilor congruente	201	203	307

Capitolul IV. PERPENDICULARITATE

IV.1.	Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă	209	210	311
IV.2.	Construcția și congruența triunghiurilor dreptunghice	211	212	311
IV.3.	Mediatoarea unui segment. Concurența mediatorilor laturilor unui triunghi	214	215	312
IV.4.	Simetria față de o dreaptă	217	218	313
IV.5.	Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Concurența bisectoarelor unghiurilor unui triunghi	220	221	313

Capitolul V. PARALELISM

	Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)	223	225	314
--	--	-----	-----	-----

Capitolul VI. PROPRIETĂȚI ALE TRIUNHIURILOR

VI.1.	Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior	229	230	315
VI.2.	Înălțimea unui triunghi. Concurența înălțimilor unui triunghi	232	233	316
VI.3.	Aria unui triunghi (intuitiv pe rețele de pătrate)	235	236	316
VI.4.	Mediana în triunghi. Concurența medianelor unui triunghi	238	240	316
VI.5.	Proprietăți ale triunghiului isoscel (unghiuri, linii importante, simetrie)	241	243	317
VI.6.	Proprietăți ale triunghiului echilateral (unghiuri, linii importante, simetrie)	247	248	319
VI.7.	Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	251	252	320

Capitolul VII. VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU LUCRAREA SCRISĂ SEMESTRIALĂ

	Semestrul I. Testele 24 - 28	255	322
	Semestrul al II-lea. Testele 29 - 33	259	323

Capitolul VIII. RECAPITULARE FINALĂ

	Testele 34 - 41	264	324
	Rezultate. Indicații. Soluții. Comentarii	272	
	Bibliografie	326	

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

CAPITOLUL I

MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I. 1. Operații cu numere naturale

Să recapitulăm:

Adunarea numerelor naturale

• Aflați suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr natural de 5 cifre, știind că cifrele fiecărui număr sunt distincte.

Răspuns: 108999

Rezolvare

$$\begin{array}{r} 98765 + \\ 10234 \\ \hline 108999 \end{array}$$

Scăderea numerelor naturale

• O societate comercială a depus la bancă într-o zi suma de 57893 lei, iar a doua zi o sumă cu 13959 lei mai mică decât în prima zi.

Aflați:

a) Cât a depus societatea comercială în a doua zi la bancă?

b) Ce sumă a depus în ambele zile?

Răspuns: În a doua zi a depus 43934 lei, iar în ambele zile a depus 101827 lei.

Rezolvare

$$\begin{array}{r} 57893 - \\ 13959 \\ \hline 43934 \end{array}$$

a)

$$57893 +$$

b)

$$\begin{array}{r} 43934 \\ 101827 \\ \hline \end{array}$$

Rețineți!

↻ $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a și b (**comutativitatea**);

↻ $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a și b (**asociativitatea**);

↻ $a + 0 = 0 + a = a$ (0 este **element neutru** la adunarea numerelor naturale).

Înmulțirea numerelor naturale

• Printr-un robinet curg într-o oră 897 litri de apă.

Ce cantitate de apă va curge prin același robinet în 17 ore?

Răspuns: 15249 l de apă.

Rezolvare

$$\begin{array}{r} 897 \cdot \\ 17 \\ \hline 2679 \\ 897 \\ \hline 15249 \end{array}$$

Rețineți!

↻ $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a și b (**comutativitatea**);

↻ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele naturale a și b (**asociativitatea**);

↻ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 este **element neutru** la adunarea numerelor naturale);

↻ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ și $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, ($b \geq c$) (**distributivitatea** înmulțirii față de adunare și scădere);

↻ $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (0 este **element absorbant**).

Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural

Putem reprezenta 6^2 printr-un pătrat cu 6 rânduri, fiecare având câte 6 pătrățele?

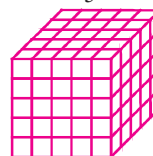
Dar 5^3 printr-un cub cu 5 straturi, fiecare strat conținând 5 rânduri de câte 5 cubulețe?

Rezolvare:

6^2



5^3



Avem:

$$36 = 6 \cdot 6 = 6^2$$

$$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$$

☞ Spunem că 36 este pătratul lui 6 sau că 36 este 6 la pătrat și că 125 este cubul lui 5 sau că 125 este 5 la cub.

☞ Spunem că 36 este pătrat perfect, iar 125 este cub perfect.

În general: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$, unde $a, b \in \mathbb{N}$.

Rețineți!

Dacă $a, n \in \mathbb{N}$, atunci:

☞ Scrierea a^n se citește **a la puterea n** sau **puterea a n -a a numărului a** ;

☞ a se numește **baza puterii**, iar n **exponentul puterii**.

Cazuri particulare: $a^1 = a$, $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), 0^0 nu are sens;

$0^n = 0$ ($n \neq 0$), $1^n = 1$ (oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$);

0^0 – nu este definită (nu are sens).

Împărțirea cu rest a numerelor naturale

Un microbuz are 18 locuri. Câte transporturi trebuie să facă microbuzul pentru a transporta 423 de persoane?

Avem:

$$\begin{array}{r} 423 \overline{) 18} \\ \underline{36} \\ 63 \\ \underline{54} \\ 9 \end{array}$$

Răspuns:

24 de transporturi. Avem: $423 = 18 \cdot 23 + 9$.

În general:

☞ Oricare ar fi numerele naturale a și b , $b \neq 0$, există numerele naturale c și r , unic determinate, astfel încât $a = b \cdot c + r$, $r < b$ (**teorema împărțirii cu rest**).

☞ „ a ” se numește **deîmpărțit**, „ b ” se numește **împărțitor**, „ c ” se numește **cât**, iar „ r ” este **restul împărțirii**.

☞ $0 : a = 0$, oricare ar fi numărul natural nenul a .

☞ Împărțirea la 0 nu are sens.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Calculați:

- a) $3452 + 1759$; f) $931 + 92 + 135$; k) $732 + 148 - 594$;
b) $3456 + 189$; g) $493 + 23 + 145 + 16$; l) $38452 - 198 - 334$;
c) $4035 + 893$; h) $473 + 594 + 78345$; m) $47321 - 1893$;
d) $359 + 173 + 483$; i) $378 - 59$; n) $7312 + 89 - 567$;
e) $893 + 106 + 713$; j) $17435 - 3946$; o) $4325 - 789 - 1034$. (nota 5)

2. Calculați utilizând proprietățile adunării:

- a) $27 + 58 + 42 + 63$; d) $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24$;
b) $7835 + 749 + 251$; e) $49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54$;
c) $139 + 45 + 61 + 55$; f) $25 + 50 + 75 + 100 + 75 + 150$. (nota 7)

II.7. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive

Rețineți!

➤ Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive și ordinea parantezelor este aceeași ca și a operațiilor cu numere naturale. (Vezi pagina 11)

Exemple:

Calculați:

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}$;

b) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} : \frac{3}{14}$;

c) $2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{4} : \frac{5}{8} - 0,2 \cdot \frac{1}{3} : \frac{5}{6}$;

d) $\left(\frac{5}{7} - \frac{9}{14}\right) : \frac{5}{21}$;

e) $\frac{5}{6} \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{13}{4} - \frac{25}{8} : \frac{25}{4}\right)\right]$;

f) $\left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) : 0,5\right]\right\} : 3\frac{5}{6}$.

Rezolvare:

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) - \frac{5}{6} = \frac{3}{3} - \frac{5}{6} = \frac{6-5}{6} = \frac{1}{6}$.

b) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} : \frac{3}{14} = \frac{2}{\cancel{7}^1} \cdot \frac{3}{\cancel{4}^2} \cdot \frac{14}{\cancel{3}^1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{14}{1} = 1$.

c) $2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{4} : \frac{5}{8} - 0,2 \cdot \frac{1}{3} : \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} =$
 $= \frac{25}{3} + \frac{75}{1} - \frac{3}{25} = \frac{25}{75} + \frac{150}{75} - \frac{6}{75} = \frac{169}{75} = 2\frac{19}{75}$.

d) $\left(\frac{5}{7} - \frac{9}{14}\right) : \frac{5}{21} = \left(\frac{10}{14} - \frac{9}{14}\right) : \frac{5}{21} = \frac{1}{14} \cdot \frac{21}{5} = \frac{3}{10}$.

e) $\frac{5}{6} \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{13}{4} - \frac{25}{8} : \frac{25}{4}\right)\right] = \frac{5}{6} \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{13}{4} - \frac{2}{1}\right)\right] =$
 $= \frac{5}{6} \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{13}{4} - \frac{2}{4}\right)\right] = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{2}{4} + \frac{11}{4}\right) =$
 $= \frac{5}{6} \cdot \frac{13}{4} = \frac{65}{24} = 2\frac{17}{24}$.

f) $\left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) : 0,5\right]\right\} : 3\frac{5}{6} =$
 $= \left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{2}\right]\right\} : \frac{23}{6} =$
 $= \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1}\right)\right] : \frac{6}{23} = \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}\right) \cdot \frac{6}{23} =$
 $= \left(27/1 + \frac{1}{27}\right) \cdot \frac{6}{23} = \left(\frac{27}{27} + \frac{1}{27}\right) \cdot \frac{6}{23} = \frac{28}{27} \cdot \frac{6}{23} = \frac{56}{207}$.

EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Calculați: **a)** $\left(3\frac{2}{7} + 4\frac{1}{5}\right) : \left(\frac{21}{5} + \frac{23}{7}\right)$; **b)** $5\frac{1}{3} : 6\frac{2}{5} + \left(12 : 3\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3}$;
c) $\left[\frac{16}{5} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right] : \frac{7}{20}$; **d)** $\frac{111}{900} : \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{90} + \frac{1}{900}\right)$; **e)** $\left[\left(2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}\right) : 2\frac{1}{5}\right] + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) : \frac{10}{8}$. (nota 7)

2. Calculați: **a)** $6 \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{7}{36} - \frac{1}{24}\right)\right] : \frac{29}{6}$; **b)** $\left[12 + 11 : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right)\right] \cdot \frac{7}{27}$;
c) $10\frac{1}{24} + \left(7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} - 12\frac{1}{4} : \frac{7}{9}\right) : 6$; **d)** $\left[\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right) : \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{8} + \frac{7}{20}\right) : \left(1 + \frac{9}{20}\right)\right] : \frac{7}{50}$;
e) $1 : \left\{\frac{1}{3} + \frac{12}{13} \cdot \left[\frac{1}{3} + 1 : \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}\right)\right]\right\} \cdot 40$; **f)** $\frac{1}{4} : \left\{\frac{1}{4} + 4 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \frac{1}{4}\right)\right]\right\}$;
g) $\left(\frac{1}{1997} - \frac{1}{1997 \cdot 1998}\right) : \left(\frac{1}{1998} - \frac{1}{1997 \cdot 1998}\right)$. (nota 9)

3. Calculați: **a)** $\frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$; **b)** $2\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{14} - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; **c)** $10\frac{1}{2} - \left(2\frac{2}{3} \cdot \frac{27}{32} - \frac{5}{8} \cdot \frac{14}{25}\right)$;
d) $120\frac{2}{3} - \left[\left(2\frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot 2\frac{1}{4}\right) : \frac{1}{5} + 3\frac{3}{4}\right] : \frac{1}{4}$; **e)** $\left\{\left[3\frac{3}{4} : \left(1\frac{3}{4} : \frac{2}{3} - 1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{5}{7}\right] : 5 + \frac{20}{21}\right\} \cdot 2\frac{1}{3}$;
f) $\frac{\left(4\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5}\right) : 7\frac{1}{10} + 4\frac{1}{2}}{\left(2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{20} - 2\frac{2}{5}\right) : 1\frac{9}{10}} + \frac{10 \cdot 2\frac{7}{10}}{3 + 1\frac{2}{3}}$; **g)** $\frac{2\frac{3}{2} - 1\frac{3}{10}}{2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4}} + \frac{2}{3\frac{3}{7} + \frac{1}{7}}$.
a) - b) (nota 7); **c) - g)** (nota 9)

4. Efectuați: **a)** $5 \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{7}{24} - \frac{5}{36}\right) : \frac{55}{72}\right]$; **b)** $\frac{85}{800} : \left[\frac{1}{19} \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{50}\right) + \frac{1}{360} : \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{45}\right)\right]$;
c) $\left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3} : \left(\frac{5}{12} - \frac{2}{18}\right) \cdot 1\frac{5}{6}\right]^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$; **d)** $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} : \left[\left(1 + 1\frac{1}{2}\right) \cdot 8 - \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}\right]$;
e) $3 + 3\frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{5}{2} - 3\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{13}\right) \cdot 1\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right]$; **f)** $\frac{3}{5} \cdot \left\{\left(\frac{7}{1500} + \frac{1}{200}\right) \cdot 6\frac{14}{31} + 1\frac{4}{7} : \left[\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} - \frac{1}{24} : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)\right]\right\}$;
g) $\left[\left(4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 8 - \left(1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}\right) \cdot 16\right] : 28$. (nota 9)

5. Calculați:

a) $0,66 + 3\frac{1}{7} : \frac{2}{7}$; **b)** $\frac{1}{3} : \left(3 + 6 : \frac{1}{2}\right)$; **c)** $0,6 \cdot \left[\frac{1}{3} + \left(1\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} - 1\frac{4}{9}\right)\right] \cdot \frac{6}{5}$; **d)** $\left(\frac{2}{7} - \frac{2}{14}\right) \cdot 3\frac{1}{2}$;
e) $0,31 : \left[0,25 + 2 \cdot \left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{6}\right)\right]$; **f)** $1,4 + 0,14 \cdot \left[\left(2,25 + \frac{1}{3} \cdot 0,5\right) : 4\frac{5}{6} + 1,75\right]$;

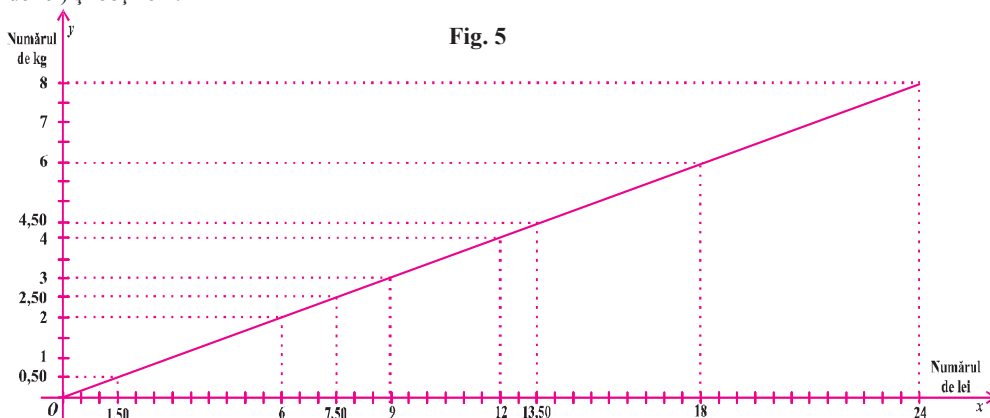
III.4. Mărimi direct proporționale; regula de trei simplă; șir de rapoarte egale

Să observăm:

Un comerciant vinde căpșuni la 8 persoane cu prețul de 3 lei / kg și completează următorul tabel:

Cantitatea de căpșuni în kg	2	6	4	8	0,5	3	2,50	4,50
Costul în lei	6	18	12	24	1,5	9	7,50	13,50

Acum, figurăm pe un grafic (**fig. 5**) datele din tabel (pe o axă numărul de kg, iar pe cealaltă numărul de lei) și obținem:



- ⊖ Să comparăm perechea de numere 2 și 8 de pe axa Oy cu perechea 6 și 24 de pe axa Ox .
- ⊖ Observăm că dacă cantitatea de căpșuni a crescut de 4 ori, atunci costul total crește tot de 4 ori.
- ⊖ Comparați și alte perechi de numere corespunzătoare: de exemplu perechea 0,5 și 6 de pe axa Oy cu perechea corespunzătoare 1,50 și 18 de pe axa Ox . Ce observați?
- ⊖ Numărului 7 de pe axa Oy ce număr îi corespunde pe axa Ox ?
- ⊖ **În concluzie:** Observăm că dacă cantitatea de căpșuni crește (descrește) de un număr de ori, atunci și costul total crește (descrește) de același număr de ori.

⊖ **În general:** Spunem că două mărimi variabile care depind una de cealaltă astfel încât dacă măsura uneia crește (descrește) de un număr de ori, atunci și măsura celeilalte crește (descrește) de același număr de ori, se numesc **mărimi direct proporționale**.

Spunem că numerele nenule a_1 și a_2 sunt **direct proporționale**, respectiv, cu numerele nenule b_1 și b_2 ,

dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Să comparăm rapoartele dintre cantitățile de căpșuni vândute și costurile corespunzătoare:

Avem: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$; $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$; $\frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$; $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $\frac{2,5}{7,5} = \frac{1}{3}$; $\frac{4,5}{13,5} = \frac{1}{3}$

- ⊖ Observăm că toate rapoartele sunt egale (au aceeași valoare) și avem șirul:

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{3}{9} = \frac{2,5}{7,5} = \frac{4,5}{13,5}$$

⊖ **În general:** Dacă rapoartele $\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \frac{a_3}{b_3}; \dots; \frac{a_n}{b_n}$ au aceeași valoare, spunem că ele formează un **șir de rapoarte egale**.

- ⊖ Spunem că numerele nenule a_1, a_2, \dots, a_n sunt **direct proporționale** respectiv, cu numerele nenule

b_1, b_2, \dots, b_n dacă putem scrie șirul de rapoarte egale: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Problemă rezolvată:

1800 tone de marfă a fost repartizată în trei localități. Știind că localitățile au câte 5 magazine, 6 magazine și, respectiv, 7 magazine și fiecărui magazin i s-a repartizat aceeași cantitate de marfă, aflați câte tone de marfă a fost repartizată fiecărei localități.

Rezolvare:

Fie a, b, c cantitățile de marfă repartizate fiecărei localități. Numerele a, b, c sunt direct proporționale cu numerele 5, 6 și, respectiv, 7. Avem șirul de rapoarte egale: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = k$, unde $a = 5k, b = 6k$ și $c = 7k$.

Dar $a + b + c = 1800$, de unde $18k = 1800$.

Deci $k = 100$ și $a = 500; b = 600; c = 700$.

Atenție!

☞ Spunem că am împărțit numărul 1800 în **parți direct proporționale** cu numerele 5, 6 și 7.

Să rezolvăm:

Din 16 kg de portocale se obțin 4 l de suc. Din câte kilograme de portocale se obține 23 l de suc?

Metoda reducerii la unitate

4 l suc 16 kg portocale

1 l suc $\frac{16}{4} = 4$ kg portocale

23 l suc $4 \cdot 23 = 92$ kg portocale

Răspuns:

23 l de suc se obțin din 92 kg de portocale.

Regula de trei simplă. Metoda proporției

4 l 16 kg

23 l x kg

Avem proporția: $\frac{4}{23} = \frac{16}{x}$,

de unde $x = \frac{23 \cdot 16}{4} = 92$.

☞ Mărimile „litri de suc“ și „cantitatea de portocale“ sunt mărimi direct proporționale.

EXERCII ȘI PROBLEME

1. Stabiliți care dintre următoarele perechi de mărimi sunt direct proporționale:
a) distanța și timpul când viteza rămâne aceeași; **b)** timpul și viteza când distanța rămâne aceeași; **c)** viteza și distanța când timpul rămâne același; **d)** timpul de lucru și numărul muncitorilor care trebuie să efectueze o lucrare (norma de lucru fiind aceeași); **e)** cantitatea de marfă vândută și costul total când prețul unitar rămâne același; **f)** numărul de oi și hrana consumată într-un timp dat când rația este aceeași; **g)** cantitatea de lichid ce curge într-un timp dat și numărul de robinete dacă debitul este același (**debit - cantitatea de lichid ce curge printr-un robinet într-o unitate de timp**); **h)** cantitatea de grâu și cantitatea de făină obținută; **i)** lungimea și lățimea unui dreptunghi când aria rămâne aceeași; **j)** cantitatea de benzină consumată de un automobil și distanța parcursă. (nota 7)
2. Dacă 40 de stilouri costă 80 lei, cât ar costa 11 stilouri de același fel? (nota 5)
3. 6 kilograme de făină se cumpără cu 2 lei și 49 bani. Cu câți lei se vor cumpăra 12 kg de făină? (nota 5)
4. Dacă 7 l de ulei ar costa 10, 5 lei, cât ar costa 75 l de ulei? (nota 5)
5. Din 200 kg de grâu se obțin 160 kg făină. Din câte kilograme grâu se obțin 420 kg făină? Câte kg de făină se obțin din 3 tone de grâu? (nota 7)
6. 6 kilograme de mere costă 18 lei. Cât costă 7 kg de mere? Dar 11 kg de mere? (nota 5)
7. Un biciclist a parcurs 10,5 km în 20 de minute. Ce distanță va parcurge biciclistul în două ore, dacă se va deplasa cu aceeași viteză? (nota 5)

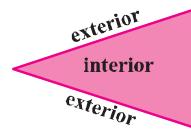
Capitolul II

UNGHIIURI

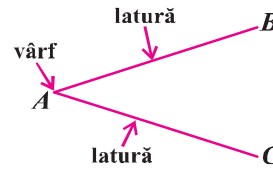
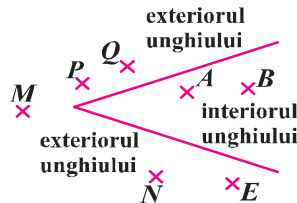
II.1. Definiție, notații, elemente; interiorul unui unghi; exteriorul unui unghi; unghi nul; unghi cu laturile în prelungire

Ce se înțelege prin unghi?

Să observăm:



▪ Numim **unghi** figura geometrică formată din două semidrepte închise care au originea comună.



Reprezentăm:	Scriem:	Citim:
		<ul style="list-style-type: none"> • Unghiul xOy; • Unghiul 1; • Unghiul O.
	<ul style="list-style-type: none"> • $\sphericalangle xOy$ sau \widehat{xOy}; • $\hat{1}$ sau $\sphericalangle 1$; • $\sphericalangle O$ sau \hat{O}. 	

Observații:

▪ Dacă unghiul îl notăm cu trei litere, atunci litera care marchează vârful lui este scrisă totdeauna în mijloc.

Ce este unghiul nul și unghiul alungit?

Să observăm:



▪ Spunem că unghiul $\sphericalangle AOB$ este **unghi nul**.

▪ Laturile $[OA$ și $[OB$ coincid.



▪ Laturile unghiului $\sphericalangle AOB$, semidreptele $[OA$ și $[OB$ sunt semidrepte opuse.

▪ Spunem că unghiul $\sphericalangle AOB$ este unghi cu laturile în **prelungire** sau unghi **alungit**.

Rețineți!



↻ Unghiul care nu este nici alungit, nici nul se numește **unghi propriu**.

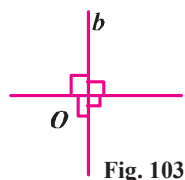
Capitolul IV

PERPENDICULARITATE

IV.1. Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă

Să recapitulăm:

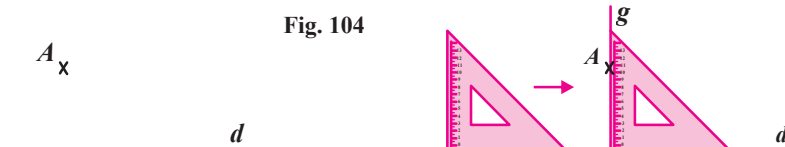
- Prin plierea unei foi de hârtie de două ori, astfel încât părțile suprapuse să coincidă de fiecare dată se obțin patru unghiuri drepte. Cele două drepte astfel obținute se vor numi **drepte perpendiculare** (fig. 103)
- Dacă dreptele a și b sunt perpendiculare, atunci notăm $a \perp b$, în caz contrar vom nota $a \not\perp b$.



Cum construim perpendiculara pe o dreaptă dată, dintr-un punct exterior acesteia?

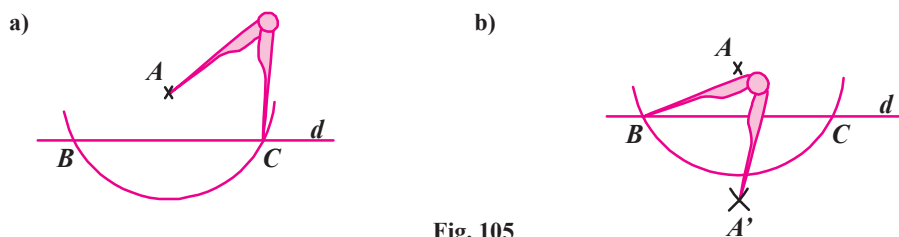
Fie dreapta d și punctul A , unde $A \notin d$.

Utilizând numai echerul



Am așezat echerul cu o catetă pe dreapta d și apoi l-am deplasat de-a lungul dreptei d până când cealaltă catetă a echerului conține punctul A , după care trasăm dreapta g (fig. 104).

Utilizând compasul și o riglă negradată



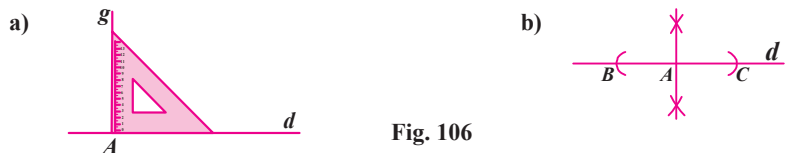
Pasul 1: Fixăm vârful ascuțit al compasului în punctul A și cu o deschidere suficient de mare, descriem un arc de cerc care să intersecteze dreapta d în două puncte distincte B și C (fig. 105a).

Pasul 2: Fixăm vârful ascuțit al compasului în punctul B și apoi în punctul C cu aceeași deschidere și trasăm câte un arc de cerc situate în semiplanul determinat de dreapta d care nu conține punctul A (fig. 105b).

Fixăm punctul A' în care se intersectează cele două arce de cerc.

Dreapta AA' este perpendiculară pe dreapta d , adică $AA' \perp d$.

Cum construim perpendiculara pe o dreaptă dată, dintr-un punct care aparține dreptei? ($A \in d$)



Dacă $A \in d$ așezăm echerul cu vârful drept în punctul A și cu o catetă pe dreapta d (fig. 106a)). Dacă utilizăm numai compasul și o riglă negradată punctele B și C pe dreapta d le obținem la pasul 1 construind două arce de cerc, cu aceeași deschidere a compasului de o parte și de alta a punctului A (fig. 106b)), apoi repetăm construcția de la pasul 2 (fig. 106b)).

Capitolul VI

PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIURILOR

VI. 1. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi; teorema unghiului exterior

Rețineți!

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

☛ În orice triunghi suma măsurilor unghiurilor este egală cu 180° .

Ipoteza:

Există $\triangle ABC$, oarecare.

Demonstrație:

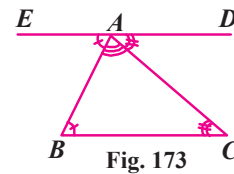
Efectuăm o construcție auxiliară. Fie dreapta DE astfel încât $DE \parallel BC$ și $A \in DE$ (fig. 173).

$m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle ACB)$ (alterne interne).

$m(\sphericalangle BAE) = m(\sphericalangle ABC)$ (alterne interne).

Însă, $m(\sphericalangle BAE) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAD) = 180^\circ$ (punctele E, A, D sunt coliniare).

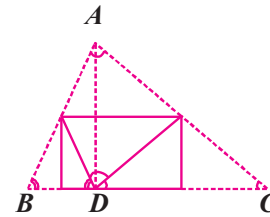
Deci $m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAD) + m(\sphericalangle BAE) = 180^\circ$, q.e.d.



Concluzia

$m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) = 180^\circ$.

În figura 174 este descris un mijloc menit să verifice teorema conform căreia suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180° . $\triangle ABC$ este o foaie de hârtie în formă de triunghi, iar $[AD]$ este înălțime. Hârtia se pliază astfel încât vârful A să se suprapună cu punctul D , apoi se duc prin pliere vârfurile B și C în punctul D . În jurul punctului D , de aceeași parte a dreptei BC , apar cele trei unghiuri ale triunghiului. Efectuați efectiv acest experiment.



Consecințe

1. Într-un triunghi dreptunghic unghiurile ascuțite sunt complementare.
2. Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghi isoscel au măsura egală cu 45° .
3. Fiecare unghi ale unui triunghi echilateral are măsura egală cu 60° .

Unghi exterior unui triunghi

☛ Un unghi exterior unui triunghi este unghiul format de o latură a triunghiului cu prelungirea altei laturi a triunghiului

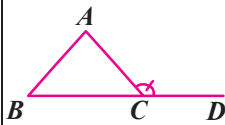


Fig. 175

În fig. 175 unghiul $\sphericalangle ACD$ este exterior triunghiului ABC .
Un triunghi are 6 unghiuri exterioare (fig. 176).

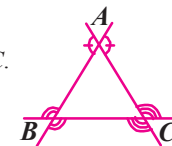


Fig. 176

Teorema unghiului exterior

☛ Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului neadiacentei lui.

Ipoteza:

Există $\triangle ABC$ și punctele D, E, F , $A \in (CD)$, $C \in (BF)$, $B \in (AE)$.

Concluzia:

$m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)$.

$m(\sphericalangle ACF) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)$.

$m(\sphericalangle CBE) = m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C)$.

Demonstrație:

$A \in (CD)$ implică $m(\sphericalangle BAD) = 180^\circ - m(\sphericalangle A) = 180^\circ - [180^\circ - (m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C))] = m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)$ (am înlocuit $m(\sphericalangle A)$ cu $180^\circ - [m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)]$). (fig. 177)

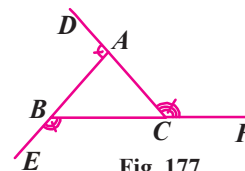


Fig. 177

Probleme rezolvate:

1. În figura 178 unghiurile exterioare triunghiului ABC cu vârfurile în punctele B și C au măsurile de 140° și, respectiv, 105° . Aflați măsura unghiului $\sphericalangle A$ al triunghiului.

Rezolvare:

$$m(\sphericalangle B) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ; m(\sphericalangle C) = 180 - 105^\circ = 75^\circ.$$

$$\text{Deci } m(\sphericalangle A) = 180^\circ - (m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)) = 180 - (40 + 75^\circ) = 75^\circ.$$

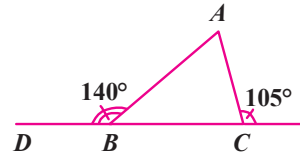


Fig. 178

2. a) Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle B) = 68^\circ$. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$ se intersectează în punctul I . Aflați măsura unghiului $\sphericalangle AIC$. (figura 179)

b) Dacă $m(\sphericalangle BCX) = 135^\circ$, aflați măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.

Rezolvare:

a) Se știe că $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB) = 180^\circ$.

Dar $m(\sphericalangle ABC) = 68^\circ$, de unde $m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB) = 112^\circ$.

(AI și CI fiind bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$ și, respectiv, $\sphericalangle BCA$ rezultă că:

$$m(\sphericalangle AIC) = 180^\circ - [m(\sphericalangle IAC) + m(\sphericalangle ICA)] = 180^\circ - \left[\frac{m(\sphericalangle BAC)}{2} + \frac{m(\sphericalangle ACB)}{2} \right] = 180^\circ - \frac{112^\circ}{2} = 124^\circ.$$

b) $m(\sphericalangle BCX) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAC)$ (teorema unghiului exterior) de unde $m(\sphericalangle BAC) = 135^\circ - 68^\circ = 67^\circ$.

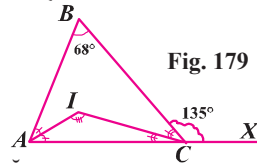


Fig. 179

EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Completați tabelul de mai jos știind că $m(\sphericalangle A)$, $m(\sphericalangle B)$ și $m(\sphericalangle C)$ sunt măsurile unghiurilor unui triunghi ABC .

$m(\sphericalangle A)$	$m(\sphericalangle B)$	$m(\sphericalangle C)$
40°		50°
68°	110°	
	$23^\circ 16' 13''$	$49^\circ 43' 47''$

(nota 5)

2. Un triunghi dreptunghic are măsura unui unghi egală cu $23^\circ 15' 13''$. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

(nota 5)

3. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC știind că: $m(\sphericalangle B) = 3 \cdot m(\sphericalangle C)$ și $m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle C) = 65^\circ$.

(nota 7)

4. Fie ABC o foaie de hârtie în formă de triunghi în care unghiul \hat{A} este ascuțit și $AC > BC$. Îndoim colțul A astfel încât vârful A să cadă într-un punct oarecare D al laturii AB . Atunci hârtia capătă forma indicată în figura 180. Ce relație există între unghiurile \hat{A} și $\hat{1}$?

(nota 7)

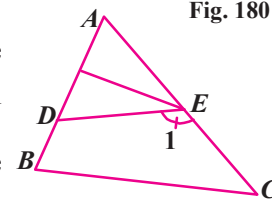


Fig. 180

5. În figura 181 știm că $\triangle ABC$ este ascuțitunghic și că $MA \perp AB$, $NB \perp BC$, $PC \perp CA$. Aflați suma măsurilor unghiurilor 1, 2 și 3.

(nota 7)

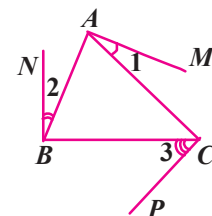


Fig. 181

6. Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi știind că acestea sunt exprimate prin numere naturale pare consecutive.

(nota 7)

Capitolul VII

VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU LUCRAREA SCRISĂ SEMESTRIALĂ

Semestrul I

TEST 24 (Varianta 1)

1. Scrieți divizorii naturali ai numărului 12. (5p) (nota 5)
2. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{34x}$ divizibil. cu 2. (5p) (nota 5)
3. Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al numerelor 45,60 și 180. (5p) (nota 5)
4. 28 de puiți sunt distribuiți pentru a fi plantați în mod egal pe rânduri. Câți puiți pot fi plantați pe un rând? (10p) (nota 5)
5. Calculați: **a)** $2^4 + 3^3 + 5^3 - 10^2 + 0^4 - 1^9$; **b)** $(2^4 \cdot 3^3 - 6^3) : 3^3$. (10p) (nota 5)
6. Desenați două unghiuri adiacente suplementare. Construiți bisectoarele lor și precizați măsura unghiului format de cele două bisectoare. (5p) (nota 5)
7. Suma dintre măsurile suplementului și complementului unui unghi este 240° . Aflați măsura unghiului. (10p) (nota 7)
8. Punctele A, B, C, D sunt situate, în această ordine, pe o dreaptă astfel încât $AC = 15$ cm, $BC = 7$ cm și $CD = 10$ cm. Dacă punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$, iar punctul N este mijlocul segmentului $[CD]$, calculați lungimea segmentului $[MN]$. (10p) (nota 7)
9. Moș Crăciun are în traistă un număr de creioane cuprins între 350 și 400 pentru a fi distribuite copiilor. Moș Crăciun observă că dacă pune creioanele în pungi câte 5, 12, 18 sau 24 de fiecare dată rămân 3 creioane. Aflați câte creioane are Moș Crăciun în traistă. (10p) (nota 9)
10. În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ respectiv $\sphericalangle DOA$, astfel încât măsura primului unghi să fie $\frac{1}{3}$ din măsura celui de-al doilea și cu 80° mai mică decât măsura celui de-al treilea unghi, iar al patrulea unghi are măsura egală cu dublul măsurii primului unghi.
a) Arătați că $m(\sphericalangle AOB) = 40^\circ$;
b) Justificați faptul că semidreapta opusă semidreptei $[OD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$. (10p) (nota 9)
11. Determinați cel mai mic număr natural, care împărțit la 7 dă restul 6, împărțit la 6 dă restul 5 și este divizibil cu 5. (10p) (nota 10)

Timp de lucru 50 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu

REZULTATE. INDICAȚII. SOLUȚII. COMENTARII

ALGEBRĂ. Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1. Operații cu numere naturale 1. **a)** 5211; **b)** 3645; **c)** 4928; **d)** 1015; **e)** 1712; **f)** 1158; **g)** 677; **h)** 79412; **i)** 319; **j)** 13489; **k)** 386; **l)** 38254; **m)** 45428; **n)** 6834; **o)** 2502. 2. **a)** $(27 + 63) + (58 + 42) = 100 + 100 = 200$; **b)** $7835 + (749 + 251) = 7835 + 1000 = 8835$ etc. 3. Fie a, b, c cele trei numere. Avem relațiile: $a + b + c = 750$; $a + b = 384$ și $b + c = 492$, de unde $a + b + b + c = (a + b + c) + b = 876$, deci $b = 876 - 750 = 126$. $a = 384 - 126 = 258$ și $c = 492 - 126 = 366$. 4. Numărul cel mic (scăzătorul) este egal cu $5182 - 4387 = 795$. Suma numerelor este 5977. 5. **a)** $x = 482 - 352 = 130$; **b)** $x = 1000 - 382 = 618$; **c)** $x = 478 + 123 = 601$; **d)** $x = 500 - 150 = 350$; **e)** $x = 1500 - 831 = 669$; **f)** $x = 7132 + 389 = 7521$. 6. **a)** 1242; **b)** 700; **c)** 16362; **d)** 11663; **e)** 4305; **f)** 86944; **g)** 826496; **h)** 187500; **i)** 416; **j)** 308; **k)** 20; **l)** 795. 7. $25 \cdot 6 \cdot 20 = 3000$ l apă. 8. **a)** baza 5, exponentul 3; **c)** baza 7, exponentul 0; ...; **i)** nu are sens. 9. **a)** 7^2 ; **b)** 10^0 ; **c)** 10^{10} ; **d)** 0^1 ; **e)** nu are sens; **f)** 3^2 ; **g)** 2012^{2013} ; **h)** 8^0 . 10. **a)** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256; 512, 1024, 2048, 4096; **b)** 0, 1, 1, 2000; **c)** 512, 1728, 81, 1000, 10000, 729; **d)** 2187, 121, 196, 27000, 15625, 303, 1; **e)** 512, 144, 15129, 0, 1, 1; **f)** 243, 729, 1331, 169, 62500; **g)** 25, 125, 625, 225, 3375; **h)** 49, 343, 2401, 289, 4913; **i)** 36, 216, 1296, 256, 4096; **j)** 64, 324, 784, 1444, 2304; **k)** 81, 361, 841, 1521, 2401; **l)** 10201, 10404, 10609, 10816, 1000000. 11. **a)** 16; **b)** 32; **c)** 85; **d)** 160; **e)** 400; **f)** 68; **g)** 240; **h)** 144; **i)** 720; **j)** 680; **k)** 840; **l)** 234; **m)** 260; **n)** 1300; **o)** 800; **p)** 400. 12. **a)** 14; **b)** 9; **c)** 40; **d)** 169; **e)** 64; **f)** 224; **g)** 1225; **h)** 324; **i)** 4. 13. **a)** $9 - 8 + 1 = 2$; **b)** $64 - 32 + 1 = 33$; **c)** $343 - 64 - 9 = 270$; **d)** $14^2 = 196$; **e)** $(7 + 4 - 1)^2 = 100$; **f)** $5^3 - 1 = 124$; **g)** $49 - 25 - 16 = 8$; **h)** $64 - 32 - 16 = 16$; **i)** $81 - 27 - 9 - 3 - 1 = 41$. 14. **a)** $9 + 361 + 484 = 36 + 289 + 529$ etc. 15. **c)** $(3 \cdot 11)^2 + (4 \cdot 11)^2 = (5 \cdot 11)^2 \Leftrightarrow (3^2 + 4^2)11^2 = 5^2 \cdot 11^2$; **d)** $(3 \cdot 111)^2 + (4 \cdot 111)^2 = (5 \cdot 111)^2 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 111^2 + 4^2 \cdot 111^2 = 5^2 \cdot 111^2$; **e)** $(3 \cdot 1111)^2 + (4 \cdot 1111)^2 = (5 \cdot 1111)^2$ etc. 16. **a)** $2^5 > 2^3$; **b)** $4^7 < 6^7$; **c)** $4^2 = 2^4$; **d)** $4^3 = 2^6$; **e)** $4^3 = 8^2$; **f)** $5^3 > 10^2$; **g)** $11^2 < 2^7$; **h)** $10^2 < 11^2$; **i)** $3^5 = 243$ și $2^8 = 256$, deci $3^5 < 2^8$. 17. **a)** 31; **b)** 59; **c)** 26; **d)** 33; **e)** 128; **f)** 483; **g)** 15; **h)** 11; **i)** 1452; **j)** 23; **k)** 158; **l)** 1200. 18. **a)** câtul 28, restul 6; **b)** câtul 40, rest 3; **c)** câtul 135, rest 18; **d)** câtul 778, rest 26; **e)** câtul 121, rest 13; **f)** câtul 41, rest 500; **g)** câtul 151, rest 14; **h)** câtul 30, rest 92; **i)** câtul 98, rest 238. 19. Fie a și b cele două numere. Avem $a = 20b + 5$ și $a + b = 152$, de unde $20b + 5 + b = 152$, adică $b = 7$ și $a = 145$. 20. 1664 și 15. 21. nu, deoarece $15 \nmid 220$. 22. 1200 și 200. 23. Conform teoremei împărțirii cu rest avem: $a = 15 \cdot 6 + r$, unde $r < 6$. Se obțin numerele: 90, 91, 92, 93, 94, 95. Sunt șase numere. 24. Cel mai mic număr este $207 = 9 \cdot 23$ și cel mai mare este $792 = 9 \cdot 88$. Deci sunt $88 - 22 = 66$ de numere. 25. **a)** $2000 = (9 : 9 + 999) \cdot (9 + 9) : 9$; **b)** $2000 = 333 \cdot (3 + 3) + (3 + 3) : 3$.

26. a)

t	0	1	3	2	2 h 40 min	3 h 20 min
d	0	45	15	30	20	10

27. Dacă numărul porțiilor este x , la prima poartă deținutul face cel mult x încercări, face un semn la cheia folosită, la a doua poartă face cel mult $x - 1$ încercări etc. În total, face cel mult $1 + 2 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{2}$ încercări. Dar $\frac{x(x+1)}{2} = 36$ conduce la $x = 8$. 28. **a)** 3; **b)** 9; **c)** orice număr natural; **d)** 342; **e)** 336; **f)** 20; **g)** 3; **h)** 4. 29. **a)** 133; **b)** 190; **c)** 3816; **d)** 2634; **e)** 20; **f)** 586; **g)** 443; **h)** 1700. 30. **a)** 70; **b)** 2479; **c)** 658800; **d)** 117216; **e)** 171; **f)** $10 \cdot 40 = 400$; **g)** 8.

Test 1. 1. 6. 2. 36. 3. 30. 4. **a)** $0 \leq n \leq 5$; **b)** nu există. 5. **a)** 20; **b)** 18; **c)** 3. 6. **a)** 11; **b)** 24,96; **c)** 4. 7. 0,63. 8. **a)** 0,35 m; 0,0415 m; 0,00013 m; **b)** $0,0215\text{m}^2$; 4200m^2 ; 131400m^2 ; **c)** $3,145\text{m}^3$; 300m^3 ; $0,13\text{m}^3$. 9. **a)** 75; **b)** 38. 10. **a)** $(a, b) \in \{(0, 15), (4, 10), (8, 5), (12, 0)\}$; **b)** $(a, b) \in \{(1, 4), (5, 2), (9, 1), (17, 0)\}$. 11. 6 ore. 12. Conform teoremei împărțirii cu rest avem relațiile: $n = 13a + 4$ și $n = 23b + 3$, de unde $n = 13b + (10b + 3)$ și $13b + (10b + 3) = 13a + 4$. $13 / 10b - 1$, b minim implică $b = 4$ și $n = 95$.